Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 5A

COLÉGIO NAVAL 2008 - 2015

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2015, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte A serão apresentadas as provas de 2008 a 2015, totalizando 160 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 8 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestrando em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Mademática".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meu filho Daniel que eu espero seja um futuro leitor deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.mademematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015

1) Seja x um número real tal que $x+\frac{3}{x}=9$. Um possível valor de $x-\frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

2) Considere que as pessoas A e B receberão transfusão de sangue. Os aparelhos utilizados por A e B liberam, em 1 minuto, 19 e 21 gotas de sangue, respectivamente, e uma gota de sangue de ambos os aparelhos tem $0,04\ m\ell$. Os aparelhos são ligados simultaneamente e funcionam ininterruptamente até completarem um litro de sangue. O tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B será, em minutos, de aproximadamente:
(A) 125
(B) 135
(C) 145
(D) 155
(E) 165

3) A solução real da equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é:
(A) múltiplo de 3.
(B) par e maior do que 17.
(C) ímpar e não primo.
(D) um divisor de 130.
(E) uma potência de 2.

4) Observe as figuras a seguir.

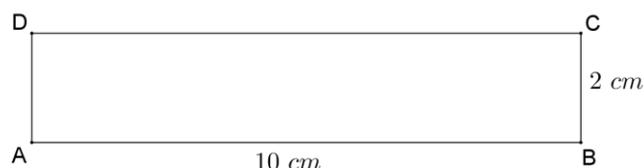
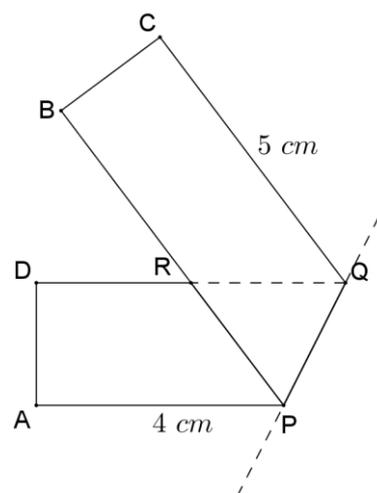



Figura I

Figura II

Uma dobra é feita no retângulo $10\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$ da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono $APQCBRD$ da figura II, em cm^2, é:

(A) $8\sqrt{5}$
(B) 20
(C) $10\sqrt{2}$
(D) $\frac{35}{2}$
(E) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

5) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60. A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

(A) $0,035$
(B) $0,055$
(C) $0,075$
(D) $0,095$
(E) $0,105$

6) Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados $AC = b$ e $BC = a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

(A) $\frac{a^2}{b^2}$
(B) $\frac{a^3}{b^2}$
(C) $\frac{a^2}{b^3}$

(D) $\frac{a^3}{b^3}$

(E) $\frac{a}{b}$

7) Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente ao inverso do número $\frac{525}{900}$, então o resto da divisão do período da dízima $\frac{q}{p+1}$ por 5 é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

8) Um número natural N, quando dividido por 3, 5, 7 ou 11, deixa resto igual a 1. Calcule o resto da divisão de N por 1155, e assinale a opção correta.

(A) 17
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 1

9) Considere o operador matemático $'*'$ que transforma o número real X em $X+1$ e o operador $'\oplus'$ que transforma o número real Y em $\frac{1}{Y+1}$.

Se $\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus\{*1\}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si, a opção correta é:

(A) $\frac{a}{b}=0,27272727\ldots$

(B) $\frac{b}{a}=0,2702702\ldots$

(C) $\frac{2a}{b}=0,540540540\ldots$

(D) $2b+a=94$

(E) $b-3a=6$

10) Analise as afirmativas abaixo.

I) Se $2^x=A$, $A^y=B$, $B^z=C$ e $C^k=4096$, então $x\cdot y\cdot z\cdot k=12$.

II) $t^m+\left(t^m\right)^p=\left(t^m\right)\left(1+\left(t^m\right)^{p-1}\right)$, para quaisquer reais t, m e p não nulos.

III) $r^q+r^{q^w}=\left(r^q\right)\left(1+r^{q^{(w-1)}}\right)$, para quaisquer reais q, r e w não nulos.

IV) Se $\left(10^{100}\right)^x$ é um número que tem 200 algarismos, então x é 2.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são falsas.
(B) Apenas as afirmativas III e IV são falsas.
(C) Apenas as afirmativas I e III são falsas.
(D) Apenas as afirmativas I, II e IV são falsas.
(E) Apenas as afirmativas I, III e IV são falsas.

11) Considere a equação do 2° grau $2014x^2 - 2015x - 4029 = 0$. Sabendo-se que a raiz não inteira é dada por $\frac{a}{b}$, onde "a" e "b" são primos entre si, a soma dos algarismos de "a + b" é:
(A) 7
(B) 9
(C) 11
(D) 13
(E) 15

12) Sobre os números inteiros positivos e não nulos x, y e z, sabe-se:
I) $x \neq y \neq z$
II) $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = 2$
III) $\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$
Com essas informações, pode-se afirmar que o número $(x-y)\frac{6}{z}$ é:
(A) ímpar e maior do que três.
(B) inteiro e com dois divisores.
(C) divisível por cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) par e menor do que seis.

13) Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados $AC = BC$, e que "L" seja a circunferência de centro "C", raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:
(A) não possui um valor máximo.
(B) pode ser igual a 5π.
(C) não pode ser igual a 4π.
(D) possui um valor mínimo igual a 2π.
(E) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

14) Considere que N seja um número natural formado apenas por 200 algarismos iguais a 2, 200 algarismos iguais a 1 e 2015 algarismos iguais a zero. Sobre N, pode-se afirmar que:
(A) se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(B) independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.
(C) se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(D) se os algarismos da dezena e da unidade não forem iguais a 1, N será um quadrado perfeito.

(E) se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

15) A equação $K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x$, na variável x, é impossível. Sabe-se que a equação na variável y dada por $3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2}$ admite infinitas soluções. Calcule o valor de $\frac{ab + K}{4}$, e assinale a opção correta.
(A) 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 5

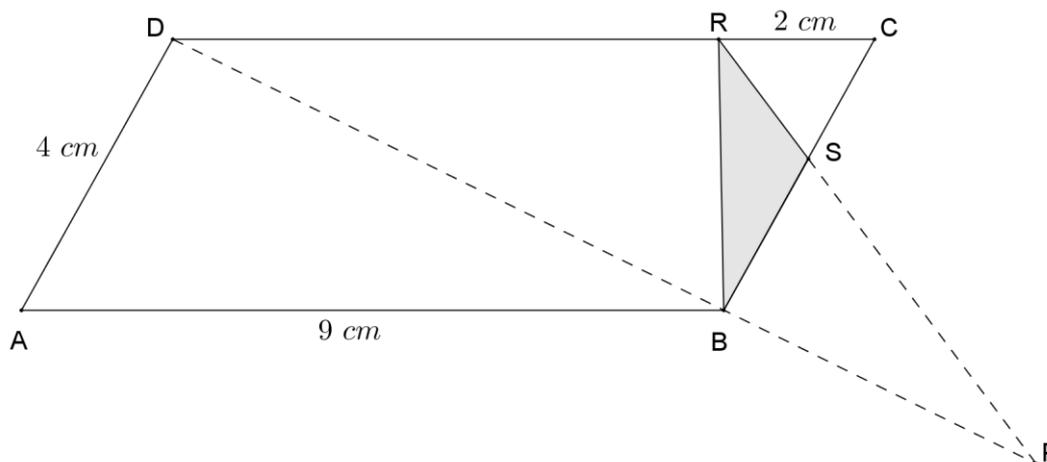
16) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:
(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

17) Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que $AD = 4$ e $BC = 8$, calcule o raio de L e assinale a opção correta.
(A) $2\sqrt{10}$
(B) $4\sqrt{10}$
(C) $2\sqrt{5}$
(D) $4\sqrt{5}$
(E) $3\sqrt{10}$

18) Sabendo que $2014^4 = 16452725990416$ e que $2014^2 = 4056196$, calcule o resto da divisão de 16452730046613 por 4058211, e assinale a opção que apresenta esse valor.
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 5
(E) 6

19) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos "E" e "F" tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em "P", qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?
(A) 2
(B) 3

(C) 4
(D) 5
(E) 6

20) Observe a figura a seguir.

Na figura, o paralelogramo ABCD tem lados 9 cm e 4 cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que CR = 2 cm; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $\frac{1}{36}$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

(A) 13,5
(B) 11
(C) 10,5
(D) 9
(E) 7,5

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014

1) Sejam $P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)$ e $Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $\sqrt{5}$
(D) 3
(E) 5

2) Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $BC=a$, qual é o valor máximo da área de ABC?

(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
(B) $\frac{a^2}{4}$
(C) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$
(D) $\frac{3a^2}{4}$
(E) $\frac{3a^2}{2}$

3) Considere um conjunto de 6 meninos com idades diferentes e um outro conjunto com 6 meninas também com idades diferentes. Sabe-se que, em ambos os conjuntos, as idades variam de 1 ano até 6 anos. Quantos casais podem-se formar com a soma das idades inferior a 8 anos?

(A) 18
(B) 19
(C) 20
(D) 21
(E) 22

4) Seja $A\cup B=\{3,5,8,9,10,12\}$ e $B\cap C_X^A=\{10,12\}$ onde A e B são subconjuntos de X, e C_X^A é o complementar de A em relação a X. Sendo assim, pode-se afirmar que o número máximo de elementos de B é

(A) 7
(B) 6
(C) 5
(D) 4
(E) 3

5) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0$, qual é a soma das duas maiores raízes reais desta equação?

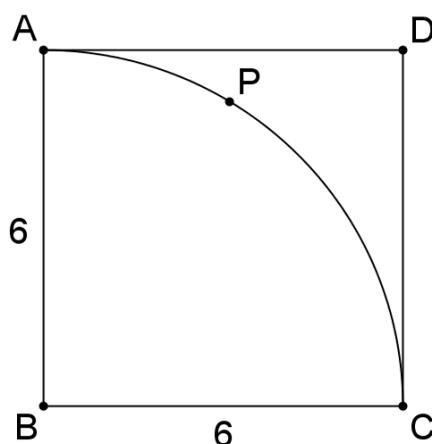
(A) 0

(B) 1

(C) $\sqrt{6}-\dfrac{1}{2}$

(D) $\sqrt{6}$

(E) $\sqrt{6}+1$

6) Analise a figura a seguir.

A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB=6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\dfrac{3\pi}{5}$, é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

(A) 36°

(B) 30°

(C) 28°

(D) 24°

(E) 20°

7) Qual é o valor da expressão $\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27}+2^{2^{1^7}}-\sqrt[5]{239+\sqrt[3]{\dfrac{448}{7}}}-\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}}$?

(A) $0,3$

(B) $\sqrt[3]{3}$

(C) 1

(D) 0

(E) -1

8) Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I - Seja $AB=c$, $AC=b$ e $BC=a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2=b^2+c^2$.

II - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III - Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, ABC é retângulo.

IV – Se ABC é retângulo, então o raio de seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

9) Assinale a opção que apresenta o conjunto solução da equação $\frac{(-3)}{\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = 0$, no conjunto dos números reais.
(A) $\{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$
(B) $\{\sqrt{13}\}$
(C) $\{-\sqrt{13}\}$
(D) $\{0\}$
(E) $\varnothing$

10) Seja a, b, x, y números naturais não nulos. Se $a \cdot b = 5$, $k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ e $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$, qual é o algarismo das unidades do número $\left(y^x - x^y\right)$?
(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 8

11) Sabe-se que a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número $\frac{1}{k}$ é
(A) natural.
(B) decimal exato.
(C) dízima periódica simples.
(D) dízima periódica composta.
(E) decimal infinito sem período.

12) Uma das raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a \neq 0$, é igual a 1. Se $b - c = 5a$ então, b^c em função de a é igual a
(A) $-3a^2$
(B) 2^a

(C) $2a \cdot 3^a$

(D) $\frac{1}{(2a)^{3a}}$

(E) $\frac{1}{2^{(3a)} \cdot a^{(3+a)}}$

13) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN = 12$ e $PN = 16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{9}{16}$

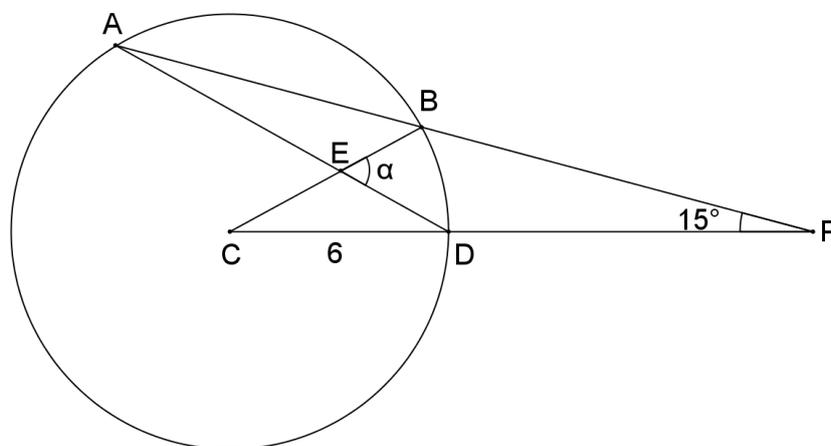
(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{25}{36}$

(E) $\frac{36}{49}$

14) Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que $BQ = 12$ e $HQ = 4$, qual é o valor de QP?

(A) 8
(B) 6
(C) 5,5
(D) 4,5
(E) 4

15) Analise a figura a seguir.

Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traçam-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traçam-se ainda os segmentos AD e CD, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

(A) 75°

(B) 60°

(C) 45°

(D) 30°

(E) 15°

16) Considere que $ABCD$ é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases $AB=10$ e $CD=22$. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que $AP=4$ e $CQ=x$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:

(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 15
(E) 16

17) O maior inteiro "n", tal que $\dfrac{n^2+37}{n+5}$ também é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 14

18) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \end{cases}$, qual é o valor de $16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4$?

(A) 4

(B) $\dfrac{1}{18}$

(C) $\dfrac{1}{12}$

(D) 18

(E) $\dfrac{1}{4}$

19) Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.
(A) 12
(B) 10
(C) 8
(D) 6
(E) 4

20) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução desta desigualdade, que são menores do que $\frac{81}{4}$, é
(A) 172
(B) 170
(C) 169
(D) 162
(E) 157

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013

1) Para $x = 2013$, qual é o valor da expressão $(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}$?
(A) -4
(B) -2
(C) 0
(D) 1
(E) 4

2) Analise as afirmativas a seguir.
I) $9,\overline{1234} > 9,123\overline{4}$
II) $\frac{222221}{222223} > \frac{555550}{555555}$
III) $\sqrt{0,444\ldots} = 0,222\ldots$
IV) $2^{\sqrt[3]{27}} = 64^{0,5}$
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(E) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

3) Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio e é perpendicular a um dos lados não paralelos, qual é a área desse trapézio?
(A) $75\sqrt{3}$
(B) $105\sqrt{3}$
(C) $180\sqrt{3}$
(D) $225\sqrt{3}$
(E) $275\sqrt{3}$

4) Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número na base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?
(A) 2012
(B) 2013
(C) 2014
(D) 2015
(E) 2016

5) No retângulo $ABCD$, o lado $BC = 2AB$. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de $ABCD$ e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se ainda, $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que $MPNS$ seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{3}{11}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{5}{11}$

(E) $\frac{7}{11}$

6) O número $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\dots) \cdot (k-1) \cdot k$ é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de k para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?

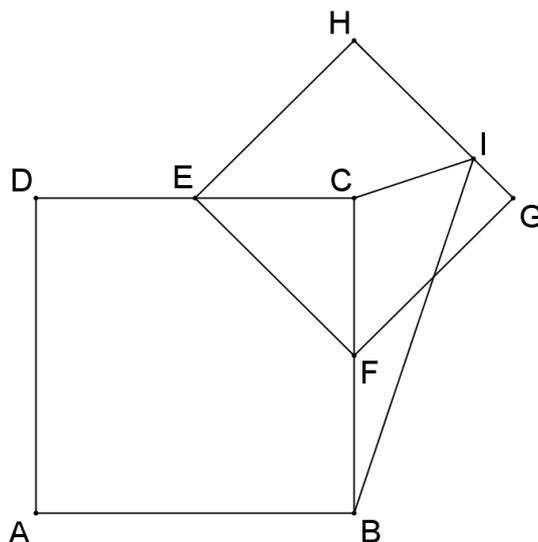
(A) 133
(B) 119
(C) 113
(D) 107
(E) 105

7) Qual é o menor valor positivo de $2160x + 1680y$, sabendo que x e y são números inteiros?

(A) 30
(B) 60
(C) 120
(D) 240
(E) 480

8) Um número inteiro possui exatamente 70 divisores. Qual é o menor valor possível para $|N + 3172|$?

(A) 2012
(B) 3172
(C) 5184
(D) 22748
(E) 25920

9) Observe a figura a seguir.

A figura acima apresenta um quadrado $ABCD$ de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, $EFGH$ também forma um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

(A) $\frac{7}{8}$

(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{3}{4}$

10) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1.$$

(A) $-\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) $\frac{11}{3}$

11) Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área de $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?
(A) $\varnothing$
(B) unitário
(C) finito
(D) $\{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$
(E) $\{11, 17, 23, 29, \dots\}$

12) Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?
(A) zero.
(B) dois.
(C) seis.
(D) treze.
(E) vinte e cinco.

13) Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 quilogramas (kg) do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunindo x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B, resulta 44000 gramas do produto, então
(A) $y^x = 2^{60}$
(B) $\sqrt{x \cdot y} = 5\sqrt{10}$
(C) $\sqrt[10]{y^x} = 256$
(D) $\sqrt[4]{x^y} = 20$
(E) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{5}$

14) Seja $P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013$. O resto $r(x)$ da divisão de $P(x)$ por $d(x) = x^4 + 1$ é tal que $r(-1)$ é:
(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

15) Uma divisão de números naturais está representada a seguir.

$D = 2012$ é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0 \neq d = 21$ ou $q = 21$. Um resultado possível para $r + d$ ou $r + q$ é:
(A) 92
(B) 122
(C) 152
(D) 182
(E) 202

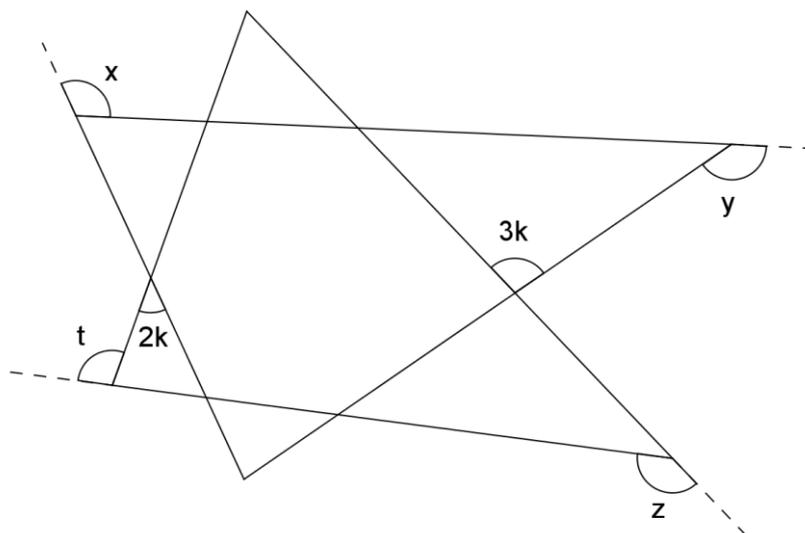
16) Seja $a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287$. Considere que a e b são números naturais e que $ab > 3$. Qual é o maior valor natural possível para a expressão $a + b$?
(A) 7
(B) 11
(C) 13
(D) 17
(E) 19

17) Sabendo que $A = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$, qual é o valor de $\dfrac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

(A) $\sqrt[5]{3^4}$
(B) $\sqrt[7]{3^6}$
(C) $\sqrt[8]{3^5}$
(D) $\sqrt[10]{3^7}$
(E) $\sqrt[12]{3^5}$

18) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível $\dfrac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?
(A) 11
(B) 12
(C) 14
(D) 15
(E) 17

19) Sabendo que n é natural não nulo, e que $x \# y = x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n+1} + \left(\dfrac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2} \right)$?
(A) 127
(B) 128
(C) 255
(D) 256
(E) 511

20) Observe a figura a seguir.

Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x + y + z + t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

(A) 479°

(B) 539°

(C) 599°

(D) 659°

(E) 719°

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012

1) É correto afirmar que o número $5^{2011} + 2 \cdot 11^{2011}$ é múltiplo de
(A) 13
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 3

2) A solução real da equação $\frac{7}{x-1} - \frac{8}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
(A) 12
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 19

3) A soma das raízes de uma equação do 2° grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é $0,25$. Determine o valor de $\frac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$, sabendo que $'a'$ e $'b'$ são as raízes dessa equação do 2° grau e $a > b$, e assinale a opção correta.
(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$
(C) -1
(D) $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$
(E) $\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

4) Sejam $'a'$, $'b'$ e $'c'$ números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = p$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q$ e $ab + ac + bc = r$. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a
(A) $\frac{p^2r^2 + 9}{4}$
(B) $\frac{p^2r^2 - 9p}{12}$
(C) $p^2r^2 - 9$

(D) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$
(E) p^2r^2-12p

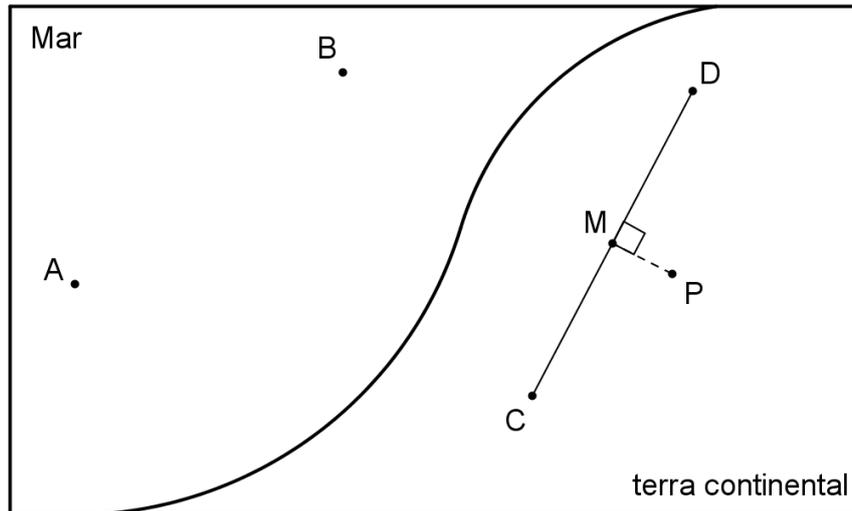
5) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5$ é
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 5
(E) 6

6) Num paralelogramo $ABCD$ de altura $CP=3$, a razão $\frac{AB}{BC}=2$. Seja $'M'$ o ponto médio de AB e $'P'$ o pé da altura de $ABCD$ baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a
(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
(B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) O valor de $\sqrt{9^{0,5}\times 0,333\ldots+\sqrt[7]{4\times\sqrt{0,0625}}}-\frac{(3,444\ldots+4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}$ é
(A) 0
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3}-2$
(D) $\sqrt{2}-2$
(E) 1

8) Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.
I – Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.
II – Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.
III – Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.
Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são falsas.

9) Observe a figura a seguir

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos 'A' e 'B' e os pontos 'C', 'D', 'M' e 'P' fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, 'M' é o ponto médio de $CD = 100 \text{ m}$ e que $PM = 10 \text{ m}$ é perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:
(A) 150 m
(B) 130 m
(C) 120 m
(D) 80 m
(E) 60 m

10) Numa pesquisa sobre a leitura dos jornais A e B, constatou-se que 70% dos entrevistados leem o jornal A e 65% leem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que leem os jornais A e B?
(A) 35%
(B) 50%
(C) 65%
(D) 80%
(E) 95%

11) Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.
I – A condição $a \cdot b \cdot c > 0$ garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
II – Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que $b > 0$, é verdade que $-b < a < b$.
III – Admitindo que $b > c$, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

12) Observe a figura abaixo.

A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescentam-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que
(A) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses $'n'$ primeiros ímpares é n^2.
(B) a soma de todos os números naturais começando do 1 até $'n'$ é sempre um quadrado perfeito.
(C) a soma dos pontos das $'n'$ primeiras etapas é $2n^2 - 1$.
(D) cada etapa $'n'$ tem $3n - 2$ pontos.
(E) cada etapa $'n'$ tem $2n + 1$ pontos.

13) O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a
(A) $5 - \sqrt{3}$
(B) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
(C) $3 - \sqrt{2}$
(D) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$
(E) 2

14) A divisão do inteiro positivo $'N'$ por 5 tem quociente $'q_1'$ e resto 1. A divisão de $'4q_1'$ por 5 tem quociente $'q_2'$ e resto 1. A divisão de $'4q_2'$ por 5 tem quociente $'q_3'$ e resto 1. Finalmente, dividindo $'4q_3'$ por 5, o quociente é $'q_4'$ e o reto é 1. Sabendo que $'N'$ pertence ao intervalo aberto $(621, 1871)$, a soma dos algarismos de $'N'$ é
(A) 18
(B) 16
(C) 15
(D) 13
(E) 12

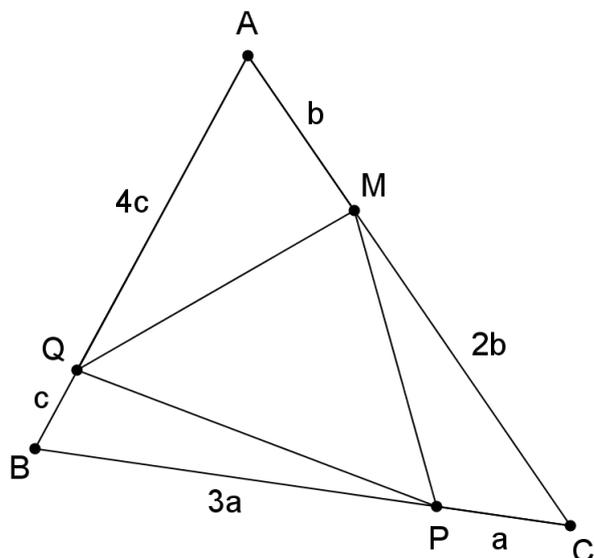
15) Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.

(A) $\sqrt[6]{1771561}$
(B) $\sqrt[4]{28561}$
(C) $\sqrt[6]{4826807}$
(D) $\sqrt[4]{331776}$
(E) $\sqrt[6]{148035889}$

16) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
(A) 2
(B) $\sqrt{2}-1$
(C) $2-\sqrt{2}$
(D) 1
(E) 0

17) Sejam $A=\left[7^{2011},11^{2011}\right]$ e $B=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=(1-t)\cdot 7^{2011}+t\cdot 11^{2011} \text{ com } t\in[0,1]\right\}$, o conjunto $A-B$ é
(A) $A\cap B$
(B) $B-\left\{11^{2011}\right\}$
(C) $A-\left\{7^{2011}\right\}$
(D) A
(E) $\varnothing$

18) Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de $'N'$ e $'n'$ lados $(N\neq n)$, e com $'D'$ e $'d'$ diagonais, respectivamente, de modo que $N-n=D-d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) indeterminada.

19) Considere a figura abaixo.

A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é

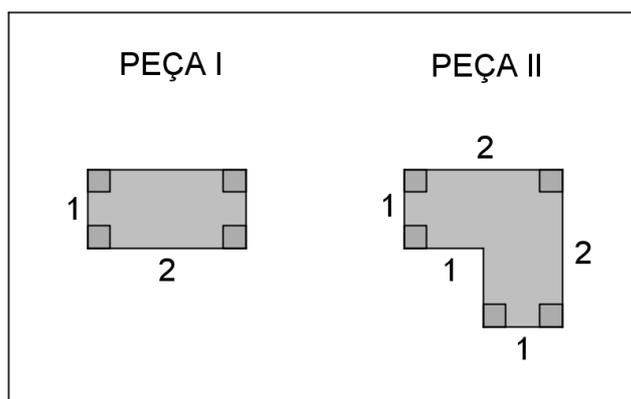
(A) $\frac{7}{12}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$

(E) $\frac{7}{8}$

20) Observe a ilustração a seguir.

Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadrado de lado 5, utilizando as peças acima?

(A) 12

(B) 11

(C) 10
(D) 9
(E) 8

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2010/2011

1) Seja ABC um triângulo com lados $AB = 15$, $AC = 12$ e $BC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que $PC = 3AP$. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero $APQB$ seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

(A) $3,5$
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) $8,5$

2) Sejam $p(x) = 2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ e $q(x) = x^2 + x + 1$. Tomando $r(x)$ como sendo o resto na divisão de $p(x)$ por $q(x)$, o valor de $r(2)$ será

(A) -8
(B) -6
(C) -4
(D) -3
(E) -2

3) Tem-se o quadrado de vértices $ABCD$ com lados medindo $'k'\,cm$. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área $ABCD$, a área do triângulo PBC equivale a:

(A) 18%
(B) 24%
(C) 27%
(D) 30%
(E) 36%

4) No conjunto dos inteiros positivos sabe-se que $'a'$ é primo com $'b'$ quando $mdc(a,b) = 1$.
Em relação a este conjunto, analise as afirmativas a seguir.
I – A fatoração em números primos é única, exceto pela ordem dos fatores.
II – Existem 8 números primos com 24 e menores que 24.
III – Se $(a+b)^2 = (a+c)^2$ então $b = c$.
IV – Se $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$.
Quantas das afirmativas acima são verdadeiras?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

5) Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar corretamente o número de soluções inteiras e positivas da equação $5x^2 + 11y^2 = 876543$. Qual foi o número de soluções que este aluno obteve?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

6) $ABCD$ é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB e com uma das extremidades em A e tangente externamente à K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será
(A) $\frac{5L}{6}$
(B) $\frac{4L}{5}$
(C) $\frac{2L}{3}$
(D) $\frac{3L}{5}$
(E) $\frac{L}{3}$

7) Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo $'h'$ a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos nesse conjunto tem área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?
(A) Infinitos.
(B) Mais de dezesseis e menos de trinta.
(C) Mais de quatro e menos de quinze.
(D) Apenas um.
(E) Nenhum.

8) Seja $'x'$ um número real. Define-se $\lfloor x \rfloor$ como sendo o maior inteiro menor do que $'x'$, ou igual a $'x'$. Por exemplo, $\lfloor 2,7 \rfloor$; $\lfloor -3,6 \rfloor$; $\lfloor 5 \rfloor$ são, respectivamente, 2; -4 e 5. A solução da igualdade $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6$ é o intervalo $[a;b)$. O valor de $a+b$ é
(A) $\frac{15}{4}$
(B) $\frac{9}{2}$
(C) $\frac{11}{2}$
(D) $\frac{13}{3}$

(E) $\frac{17}{5}$

9) ABC é um triângulo equilátero. Seja P um ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo $A\hat{P}B$ é igual a 60°, que $PA = 6$ e $PC = 8$, a medida de PQ será

(A) $\frac{24}{7}$
(B) $\frac{23}{5}$
(C) $\frac{19}{6}$
(D) $\frac{33}{14}$
(E) $\frac{11}{4}$

10) A diferença entre um desconto de 50% e dois descontos sucessivos de 30% e 20% sobre o valor de $R\$\ 40.000,00$ é um valor inteiro:

(A) múltiplo de 7.
(B) múltiplo de 9.
(C) múltiplo de 12.
(D) ímpar.
(E) zero, pois os descontos são iguais.

11) Sejam A, B e C conjuntos tais que: $A = \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, 3\}$ e $C = \{\{1\}, 2, 3\}$. Sendo X a união dos conjuntos $(A - C)$ e $(A - B)$, qual será o total de elementos de X?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

12) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$

(A) é vazio.
(B) é unitário.
(C) possui dois elementos.
(D) possui três elementos.
(E) possui quatro elementos.

13) Sabe-se que $p(x) = acx^4 + b(a+c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a+c)x + ac$ é um produto de dois polinômios do 2º grau e que os números a, b, c são reais não nulos com $(b^2 - 4ac)$ positivo. Nessas condições, é correto afirmar que

(A) $p(x)$ possui apenas uma raiz real.

(B) $p(x)$ possui duas raízes reais.
(C) $p(x)$ possui três raízes reais.
(D) $p(x)$ possui quatro raízes reais.
(E) $p(x)$ não possui raízes reais.

14) Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é $'k'$, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

(A) $\frac{5k}{2}$
(B) $\frac{4k}{3}$
(C) $\frac{4k}{5}$
(D) $\frac{k}{2}$
(E) $\frac{k}{3}$

15) Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 7\}$
(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 9\}$

16) No sistema $\begin{cases} 3x - y \cdot \sqrt{3} = 0 \\ x^2 \cdot y^{-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$, a quantidade de soluções inteiras para $'x'$ e $'y'$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) infinita.

17) No conjunto dos números reais, qual será o conjunto solução da inequação $\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \leq 0,25^{\frac{1}{2}}$?

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{15} < x < \frac{15}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{2}{15}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{15} < x < 0\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{15}{2} \leq x < -\frac{2}{15}\right\}$

(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{15}{2}\right\}$

18) Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2xy = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $\left(x^2 - y^2\right)^6$?

(A) a^3b^6
(B) a^8b^6
(C) a^6b^2
(D) a^3b^6
(E) a^4b^6

19) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?

(A) 8040
(B) 4020
(C) 2010
(D) 1005
(E) 105

20) No conjunto '$\mathbb{R}$' dos números reais, qual será o conjunto solução da equação $\frac{\sqrt{3}}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2x - 2} - \frac{\sqrt{3}}{2x + 2}$?

(A) $\mathbb{R}$
(B) $\mathbb{R} - (-1;1)$
(C) $\mathbb{R} - [-1;1]$
(D) $\mathbb{R} - \{-1;1\}$
(E) $\mathbb{R} - [-1;1)$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2009/2010

1) Num quadrado $ABCD$ de lado 6 cm, traça-se a circunferência K de centro em A e raio 4 cm. Qual é medida, em cm, do raio da circunferência tangente exterior a K e tangente ao lado BC no ponto C?
(A) $2,4$
(B) $2,5$
(C) $2,6$
(D) $2,7$
(E) $2,8$

2) A área de um quadrado de 5 cm de lado, na unidade u definida como sendo a área de um círculo de raio 1 cm, é:
(A) exatamente 25.
(B) exatamente $12,5$.
(C) aproximadamente 8.
(D) aproximadamente 6.
(E) aproximadamente 5.

3) Sabe-se que: o número natural K dividido pelo número natural A dá quociente 56 e resto zero; K dividido pelo número natural B dá quociente 21 e resto zero; e os algarismos de A são os mesmos de B e ambos possuem dois algarismos, porém em ordem inversa. A soma dos algarismos de K é igual a:
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

4) Sobre o sistema formado por $3x+4y=7$ e $6x+8y=15$, pode-se afirmar que é:
(A) indeterminado.
(B) determinado e $9x+12y=22$.
(C) determinado e $x=y=0$.
(D) determinado e $x=-y\neq 0$.
(E) impossível.

5) Um funcionário usa uma empilhadeira para transportar bobinas de 70 kg ou de 45 kg, sendo uma de cada vez. Quantas viagens com uma carga deverá fazer, no mínimo, para transportar exatamente uma tonelada dessa carga?
(A) 18
(B) 17
(C) 16
(D) 15
(E) 14

6) A menor raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m+n" é expresso por:

(A) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$

(B) $\frac{3abc+b^3}{a^2c}$

(C) $\frac{3abc-b^3}{c^2a}$

(D) $\frac{abc+b^3}{c^2a}$

(E) $\frac{abc-b^3}{c^2a}$

7) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:

(A) $5/3$

(B) $3/5$

(C) $2/5$

(D) $5/2$

(E) $3/2$

8) Sobre o lado maior de um retângulo de base 1 e altura 2 constrói-se um retângulo de base 2 e altura 3; sobre o maior lado desse último, constrói-se um retângulo de base 3 e altura 4; e assim sucessivamente, até se construir o retângulo de base 99 e altura 100. Com quantos zeros termina o produto das áreas de cada um desses retângulos?

(A) 39
(B) 40
(C) 46
(D) 78
(E) 80

9) O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^8}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

(A) $[5;+\infty[\cup \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

(B) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty[$

(C) $]-\infty;+\infty[$

(D) $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\cup[5;+\infty[$

(E) $\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[5;+\infty[$

10) Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{\text{med}(BH)}{\text{med}(IH)}$ é igual a:

(A) $\frac{\text{med}(BC)}{\text{med}(AH)}$

(B) $\frac{\text{med}(BC)}{\text{med}(AD)}$

(C) $\frac{\text{med}(BC)}{\text{med}(CD)}$

(D) $\frac{\text{med}(AD)}{\text{med}(AI)}$

(E) $\frac{\text{med}(AD)}{\text{med}(IH)}$

11) Sendo h_A, h_B e h_C as medidas das alturas; m_A, m_B e m_C as medidas das medianas; e b_A, b_B e b_C as medidas das bissetrizes internas de um triângulo ABC, analise as afirmativas a seguir.

I – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$ e $\frac{1}{h_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

II – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{m_A}$, $\frac{1}{m_B}$ e $\frac{1}{m_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

III – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{b_A}$, $\frac{1}{b_B}$ e $\frac{1}{b_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

Pode-se concluir que
(A) apenas I é sempre verdadeira.
(B) apenas II é sempre verdadeira.
(C) apenas III é sempre verdadeira.
(D) I, II e III são sempre verdadeiras.
(E) I, II e III são sempre falsas.

12) Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x - x^2 - 300}$?
(A) 100
(B) 99
(C) 98
(D) 97

(E) 96

13) O número natural 198 está escrito na base 10. Em quantas bases de numeração o número dado é escrito com três algarismos?
(A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 9

14) Os números $\frac{4x}{2-x}$ e $\frac{2-x}{4x}$ são inteiros e positivos, com $x \in \mathbb{R} - \{0; 2\}$. Nessas condições, pode-se concluir que:
(A) $x < 0$
(B) $0 < x < 1/3$
(C) $1/3 < x < 1/2$
(D) $1/2 < x < 2/3$
(E) $2/3 < x < 1$

15) Dado o número $N = \left[(2009)^{40} - 1\right]^{40} - 2010$, analise as afirmativas a seguir.
I. N é divisível por 2008.
II. N é divisível por 2009.
III. N é divisível por $2009^{40} - 2010$.
Com base nos dados apresentados, pode-se concluir que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

16) Em um trapézio isósceles $ABCD$, de base maior AB, está inscrito um arco de circunferência AMB, onde M é ponto médio da base menor CD. O ângulo $A\hat{B}C$, formado pela base maior AB e pelo lado não paralelo BC mede 60°. Qual é a razão entre as medidas da base AB e do comprimento do arco AMB, sabendo-se que os lados congruentes desse trapézio são tangentes ao arco AMB nos pontos A e B?
(A) $\frac{3}{\pi}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(E) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

17) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$ constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero $PCDB$ convexo. Se o ângulo $P\hat{D}C$ é congruente ao ângulo $P\hat{B}C$, pode-se afirmar que o quadrilátero $PCDB$ é
(A) sempre inscritível em um círculo.
(B) sempre circunscritível a um círculo.
(C) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.
(D) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.
(E) impossível de ser inscrito em um círculo.

18) Analise as afirmativas a seguir.
I) $\left(3^{0,333...}\right)^{27} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}$
II) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = 2-\sqrt{3}$
III) 10^{3k} tem $(3k+1)$ algarismos, qualquer que seja o número natural k.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

19) Os números naturais x e 18 são, nessa ordem, inversamente proporcionais aos números naturais y e 45. Se $x > y$, quantos são os valores possíveis para x?
(A) 9
(B) 10
(C) 15
(D) 18
(E) 20

20) O triângulo de lados $0,333\ldots$ cm, $0,5$ cm e $0,666\ldots$ cm é equivalente ao triângulo isósceles de base $0,333\ldots$ cm e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{151}}{24}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{\sqrt{257}}{48}$

(E) $\dfrac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2008/2009

1) Sabendo-se que $2x+3y=12$ e que $mx+4y=16$ são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições?
(A) Um
(B) Dois
(C) Três
(D) Quatro
(E) Infinitos

2) O número $a \neq 0$ tem inverso igual a b. Sabendo-se que $a+b=2$, qual é o valor de $(a^3+b^3)(a^4-b^4)$?
(A) 8
(B) 6
(C) 4
(D) 2
(E) 0

3) Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$, com x real e $x \neq \pm 1$?
(A) 16
(B) 20
(C) 23
(D) 25
(E) 30

4) O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre os naturais a, x e b, são respectivamente iguais a 1680 e 120. Sendo $a<x<b$, quantos são os valores de x que satisfazem essas condições?
(A) Nenhum.
(B) Apenas um.
(C) Apenas dois.
(D) Apenas três.
(E) Apenas quatro.

5) Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P pertencente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo $B\hat{P}C$ tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:
(A) 25°
(B) 45°
(C) 50°
(D) 65°
(E) 85°

6) Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo $ABCD$. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

(A) 120°

(B) 135°

(C) 150°

(D) 165°

(E) 175°

7) A solução de $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}$ no campo dos reais é

(A) o conjunto vazio.

(B) $\{1/2\}$

(C) $\{-1/2, 1/2\}$

(D) $[1/2, +\infty[$

(E) $]-\infty, +\infty[$

8) Quantas vezes inteiras a raiz quadrada de $0,5$ cabe na raiz cúbica de 10?

(A) Uma.
(B) Duas.
(C) Três.
(D) Quatro.
(E) Cinco.

9) Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre (use $\pi = 3,14$)

(A) vinte e um e vinte e dois.
(B) vinte e dois e vinte e três.
(C) vinte e três e vinte e quatro.
(D) vinte e quatro e vinte e cinco.
(E) vinte e cinco e vinte e seis.

10) Num determinado jogo, o apostador recebe, toda vez que ganha, o valor apostado inicialmente, mais 25% do mesmo; e recebe, toda vez que perde, apenas 25% do valor apostado inicialmente. Sabendo-se que foi feita uma aposta inicial de uma quantia x e que foram realizadas quatro jogadas, sempre sendo apostado o valor total obtido na jogada anterior, das quais ganhou-se duas e perdeu-se duas, qual é, aproximadamente, o percentual de x obtido no final?

(A) $3,7$

(B) $4,7$

(C) $5,7$

(D) $6,7$

(E) $9,8$

11) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos $AC = 12$ e $AB = 5$. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sendo I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

(A) $\frac{1}{50}$

(B) $\frac{13}{60}$

(C) $\frac{1}{30}$

(D) $\frac{13}{150}$

(E) $\frac{2}{25}$

12) Sejam y e z números reais distintos não nulos tais que $\frac{4}{yz} + \frac{y^2}{2z} + \frac{z^2}{2y} = 3$. Qual é o valor de $y + z$?

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 2
(E) 3

13) Uma expressão constituída por números de dois algarismos é do tipo $\square\square \times \square\square - \square\square$, no qual cada quadrinho deve ser ocupado por um algarismo, num total de seis algarismos para toda a expressão. Sabendo-se que os algarismos que preencherão os quadrinhos são todos distintos, o menor valor possível para toda a expressão é
(Observação: números do tipo 07 são considerados de um algarismo)
(A) 123
(B) 132
(C) 213
(D) 231
(E) 312

14) De uma determinada quantidade entre 500 e 1000 DVDs, se forem feitos lotes de 5 DVDs sobram 2; se forem feitos lotes com 12 DVDs sobram 9 e se forem feitos lotes com 14 DVDs sobram 11. Qual é a menor quantidade, acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra?
(A) 6
(B) 8
(C) 9
(D) 13
(E) 15

15) Ao dividir-se a fração $\frac{3}{5}$ pela fração $\frac{2}{3}$ encontrou-se $\frac{2}{5}$. Qual é, aproximadamente, o percentual do erro cometido?

(A) $35,55\%$
(B) $45,55\%$
(C) $55,55\%$
(D) $65,55\%$
(E) $75,55\%$

16) O gráfico de um trinômio do 2º grau y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio $-y$ tem um valor
(A) mínimo e raízes positivas.
(B) mínimo e raízes negativas.
(C) máximo e raízes positivas.
(D) máximo e raízes negativas.
(E) máximo e raízes de sinais opostos.

17) Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a
(A) $6,5$
(B) $7,0$
(C) $7,5$
(D) $8,0$
(E) $8,5$

18) Analise as afirmativas abaixo.
I – Dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si.
II – Se o inteiro x é múltiplo do inteiro y e x é múltiplo do inteiro z, então x é múltiplo do inteiro yz.
III – A igualdade $(1/a)+(1/b)=2/(a+b)$, é possível no campo dos reais.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

19) O valor de $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número
(A) múltiplo de onze.
(B) múltiplo de sete.
(C) múltiplo de cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) primo.

20) Um trinômio do 2º grau tem coeficientes inteiros, distintos e não nulos. Se o termo independente for uma das suas raízes, a outra será o
(A) inverso do coeficiente do termo de 1º grau.
(B) inverso do coeficiente do termo de 2º grau.
(C) simétrico inverso do coeficiente do termo do 1º grau.
(D) simétrico inverso do coeficiente do termo do 2º grau.
(E) simétrico inverso do coeficiente do termo independente.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2007/2008

1) Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $K = a^4 - 6a + 1$. Logo, K também pode ser expresso por:
(A) $3a^2 + 86a + 1$
(B) $3a^2 + 84a + 1$
(C) $6a^2 + 86a + 1$
(D) $6a^2 + 84a + 1$
(E) $9a^2 + 86a + 1$

2) Sabendo-se que um grado é a centésima parte de um ângulo reto, quantos grados tem o ângulo de $45º\,36'\,54''$?
(A) $50,48333\ldots$
(B) $50,58333\ldots$
(C) $50,68333\ldots$
(D) $50,78333\ldots$
(E) $50,88333\ldots$

3) Se $x + y = 2$ e $\left(x^2 + y^2\right)/\left(x^3 + y^3\right) = 4$, então xy é igual a:
(A) $12/11$
(B) $13/11$
(C) $14/11$
(D) $15/11$
(E) $16/11$

4) Uma dívida, contraída à taxa de juros simples de 10% ao mês, deverá ser paga em duas parcelas, respectivamente, iguais a $R\$126,00$, daqui a 4 meses, e $R\$192,00$, daqui a 6 meses. Caso essa mesma dívida fosse paga em duas parcelas iguais, uma daqui a 4 meses, e a outra daqui a 6 meses, qual seria a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso?
(A) $R\$\,4,30$
(B) $R\$\,4,40$
(C) $R\$\,4,50$
(D) $R\$\,4,60$
(E) $R\$\,4,70$

5) Em um numero natural N de 9 algarismos, tem-se: os algarismos das unidades simples, unidade de milhar e unidades de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhar iguais a z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:
(A) 333664
(B) 333665
(C) 333666

(D) 333667
(E) 333668

6) ABC é um triangulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte de BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:
(A) AC
(B) AB
(C) $BC/2$
(D) $HC/2$
(E) AH

7) Num triangulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. traçam-se, a partir de D, as semirretas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semirreta DE em G e a semirreta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que:
(A) $AG:AH::DG:DH$
(B) $EG:DE::FH:DF$
(C) $DG:DH::DE:DF$
(D) $AG:GE::AH:HF$
(E) $DE:AG::DF:AH$

8) Qual a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2º grau $x^2-6x+2=0$?
(A) $\left(6+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$
(B) $\left(6+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$
(C) $\left(3+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$
(D) $\left(3+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$
(E) $\left(3+3\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

9) Qual será o dia da semana na data 17 de setembro de 2009 (considerando que hoje é domingo, 29 de julho de 2007)?
(A) 2^a feira.
(B) 3^a feira.
(C) 4^a feira.
(D) 5^a feira.
(E) 6^a feira.

10) Qual é a soma dos valores reais de x que satisfazem a equação $x^2-3x+1+(x^2-3x+2)^{-1}=1$?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

(E) 4

11) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165 cm de largura, com um numero exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um numero inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?
(A) 27
(B) 30
(C) 33
(D) 36
(E) 38

12) Um móvel P_1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K_1 de diâmetro $AB = 2$ e, no mesmo instante, um outro móvel P_2 parte, no sentido anti-horário, do ponto C de uma circunferência K_2 de diâmetro $BC = 4$. Sabe-se que:
- A, B e C são colineares;
- P_1 e P_2 têm velocidade constante;
- K_1 e K_2 são tangentes exteriores em B;
- P_1 e P_2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;
- P_2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K_2;
- O primeiro encontro de P_1 e P_2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

Quantos segundos leva P_1 para dar uma volta completa em K_1?
(A) $24/7$
(B) $22/7$
(C) $20/7$
(D) $18/7$
(E) $16/7$

13) Com a "ponta seca" de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado 2, traça-se uma circunferência de raio r. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de 3 igual a $1,7$ e $\text{pi} = 3$, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?
(A) $2,8$
(B) $3,0$
(C) $3,2$
(D) $3,4$
(E) $3,6$

14) Dois amigos compraram uma rifa por $R\$\ 20,00$ cujo prêmio é de $R\$\ 1.000,00$. Um deles deu $R\$\ 15,00$, e, o outro, $R\$\ 5,00$. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu a maior parte?
(A) $R\$\ 250,00$
(B) $R\$\ 300,00$

(C) R$ 450,00
(D) R$ 500,00
(E) R$ 750,00

15) Em uma classe de x alunos, o professor de matemática escreveu, no quadro de giz, um conjunto A de n elementos. A seguir, pediu que, por ordem de chamada, cada aluno fosse ao quadro e escrevesse um subconjunto de A, diferente dos que já foram escritos. Depois de cumprirem com a tarefa, o professor notou que ainda existiam subconjuntos que não haviam sido escritos pelos alunos. Passou a chamá-los novamente, ate que o 18° aluno seria obrigado a repetir um dos subconjuntos já escritos; o valor mínimo de x, que atende às condições dadas, está entre:
(A) 24 e 30.
(B) 29 e 35.
(C) 34 e 40.
(D) 39 e 45.
(E) 44 e 50.

16) Um reservatório deve ser cheio completamente com uma mistura de 76% de gasolina e de 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?
(A) 1 h 30 min.
(B) 1 h 36 min.
(C) 1 h 42 min.
(D) 1 h 48 min.
(E) 1 h 54 min.

17) Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se 1,7 para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?
(A) 54,4
(B) 47,6
(C) 40,8
(D) 34,0
(E) 30,6

18) Teoricamente, num corpo humano de proporções perfeitas, o umbigo deve estar localizado num ponto que divide a altura da pessoa na média e extrema razão (razão áurea), com a distância aos pés maior que a distância à cabeça. A que distância, em metros, dos pés, aproximadamente, deverá estar localizado o umbigo de uma pessoa com 1,70 m de altura, para que seu corpo seja considerado em proporções perfeitas?
Dados: Usar 2,24 para raiz quadrada de 5.
(A) 1,09
(B) 1,07
(C) 1,05

(D) $1,03$
(E) $1,01$

19) Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana $AM = 12$, traçam-se os segmentos $AQ = 3$ e $QP = 6$. Sabendo-se que E é ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triangulo QPE?
(A) 6.
(B) 8.
(C) 9.
(D) 12.
(E) 18.

20) Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais foram denominados A, B e C, não necessariamente nessa ordem. Em um grupo de 19 números reais, sabe-se que 4 são irracionais, 7 pertencem a C e 10 pertencem a A. Quantos desses números pertencem, exclusivamente, ao conjunto B?
(A) 3.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.
(E) 8.

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2014/2015

1) E (Fatoração)
2) A (Razões e proporções)
3) D (Equações irracionais)
4) D (Áreas)
5) D (Áreas)
6) A (Relações métricas no triângulo qualquer)
7) B (Números racionais)
8) E (MMC)
9) C (Números racionais)
10) B (Potências e raízes)
11) D (Equação do 2° grau)
12) E (Sistemas lineares)
13) A (Áreas)
14) B (Divisibilidade)
15) D (Equação do 1º grau)
16) B (Equação polinomial)
17) C (Relações métricas no triângulo qualquer)
18) A (Fatoração)
19) D (Áreas)
20) C (Áreas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2013/2014

1) B (Operações com frações)
2) B (Triângulo retângulo – área)
3) D (Contagem)
4) B (Conjuntos)
5) C (Equações redutíveis ao 2º grau)
6) A (Circunferência – comprimentos e ângulos)
7) C (Potências e raízes)
8) D (Triângulos retângulos)
9) E (Equações irracionais)
10) E (Múltiplos e divisores)
11) D (Contagem e médias)
12) D (Equação do 2° grau e potenciação)
13) A (Triângulos – pontos notáveis e área)
14) E (Triângulos – pontos notáveis)
15) B (Ângulos na circunferência)
16) A (Área de trapézios)
17) D (Múltiplos e divisores)

18) E (Sistemas não lineares)
19) D (Potenciação e múltiplos e divisores)
20) D (Inequação produto-quociente)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2012/2013

1) A (Potências e raízes)
2) E (Números racionais)
3) D (Quadriláteros)
4) A (Sistemas de numeração)
5) B (Quadriláteros)
6) D (Múltiplos e divisores)
7) D (MDC e MMC)
8) A (Múltiplos e divisores)
9) E (Áreas)
10) C (Equações fracionárias)
11) A (Divisibilidade e congruências)
12) C (Operações com números naturais)
13) C (Misturas)
14) B (Polinômios)
15) C (Operações com números naturais)
16) A (Produtos notáveis e fatoração)
17) E (Racionalização)
18) C (Números racionais)
19) C (Potências e raízes)
20) C (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades e pontos notáveis)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2011/2012

1) E (Divisibilidade e congruências)
2) A (Equações fracionárias)
3) E (Produtos notáveis e fatoração)
4) C (Produtos notáveis e fatoração)
5) A (Equações irracionais)
6) B (Áreas)
7) D (Potências e raízes)
8) E (Quadriláteros)
9) B (Ângulos na circunferência e arco capaz)
10) C (Conjuntos)
11) D (Números reais)
12) A (Sequências)
13) B (Racionalização)
14) D (Múltiplos e divisores)
15) C (Divisibilidade e congruências)
16) E (Potências e raízes)
17) E (Função do 1° grau)
18) A (Polígonos – ângulos e diagonais)

19) B (Áreas)
20) D (Divisibilidade e congruências)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2010/2011

1) C (Áreas)
2) E (Polinômios)
3) D (Áreas)
4) E (Múltiplos e divisores)
5) A (Divisibilidade e congruências)
6) E (Circunferência)
7) E (Áreas)
8) B (Função parte inteira)
9) A (Quadriláteros)
10) C (Porcentagens e operações com mercadorias)
11) C (Conjuntos)
12) B (Equações irracionais)
13) D (Polinômios)
14) E (Triângulos – pontos notáveis)
15) B (Sistemas não lineares)
16) A (Sistema não lineares)
17) B (Inequações)
18) C (Sistemas não lineares)
19) A (Desigualdades)
20) D (Equações fracionárias)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2009/2010

1) E (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
2) C (Áreas)
3) E (Sistemas de numeração)
4) E (Sistemas lineares)
5) D (Divisibilidade e congruências)
6) A (Equação do 2° grau)
7) A (Misturas)
8) C (Múltiplos e divisores)
9) E (Inequações produto quociente)
10) C (Triângulos – semelhança e relações métricas)
11) A (Triângulos – pontos notáveis)
12) C (Função quadrática)
13) E (Sistemas de numeração)
14) C (Operações com números naturais e inteiros)
15) E (Divisibilidade e congruências)
16) D (Comprimentos na circunferência)
17) A (Quadriláteros)
18) E (Potências e raízes)
19) B (Razões e proporções)

20) B (Áreas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2008/2009

1) E (Sistemas lineares)
2) E (Sistemas não lineares)
3) D (Equações fracionárias)
4) C (MDC e MMC)
5) A (Ângulos na circunferência e arco capaz)
6) B (Quadriláteros)
7) D (Equações irracionais)
8) C (Potências e raízes)
9) E (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
10) E (Porcentagem)
11) D (Áreas)
12) A (Produtos notáveis e fatoração)
13) B (Operações com números naturais e inteiros)
14) C (MDC e MMC)
15) C (Porcentagem)
16) C (Função quadrática)
17) C (Triângulos retângulos)
18) A (Múltiplos e divisores)
19) D (Racionalização)
20) B (Equação do 2° grau)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2007/2008

1) A (Produtos notáveis e fatoração)
2) C (Fundamentos e ângulos)
3) C (Produtos notáveis e fatoração)
4) B (Juros simples e compostos)
5) D (Sistemas de numeração)
6) A (Ângulos na circunferência e arco capaz)
7) A (Triângulos – semelhança e relações métricas)
8) D (Equação do 2° grau)
9) D (Contagem e calendário)
10) D (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
11) B (MDC e MMC)
12) E (Razões e proporções)
13) E (Áreas)
14) D (Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade)
15) E (Lógica e conjuntos)
16) B (Problemas tipo torneira)
17) A (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
18) C (Razões e proporções)
19) C (Áreas)
20) B (Conjuntos numéricos e números reais)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2015

ASSUNTO	FB	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														5	0,8%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		21	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2			8	1,3%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2	14	2,2%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1				7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			10	1,6%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		21	3,3%
Divisibilidade e crongruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1	16	2,5%
Função parte inteira																												1					1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1	15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1	18	2,8%
Regra de três	3												1																				1	0,2%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2							10	1,6%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1								5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1					11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1								8	1,3%
Misturas	1				1											1			1								1			1			5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									7	1,1%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2		8	1,3%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1								5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																			6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	34	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2	29	4,5%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1			15	2,3%
Equação do 2° grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1	24	3,8%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1						16	2,5%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1			6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1		18	2,8%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1	13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	16	2,5%
Sequências																													1				1	0,2%
Função do 1° grau				1																1									1				3	0,5%
Equação do 1° grau e problemas do 1° grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1	9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	23	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1		13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1					5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		12	1,9%
Desigualdades																												1					1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1								1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1			15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		9	1,4%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		9	1,4%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2	20	3,1%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2			18	2,8%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1				14	2,2%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1									11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1					12	1,9%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		16	2,5%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1											11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	64	10,0%
TOTAL POR PROVA	**40**	**25**	**25**	**25**	**25**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**640**	**100,0%**
Artimética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	202	31,56%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	238	37,19%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	200	31,25%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

ÁREAS: 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2014/2015

1) Seja x um número real tal que $x+\frac{3}{x}=9$. Um possível valor de $x-\frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$$x+\frac{3}{x}=9 \Rightarrow \left(x+\frac{3}{x}\right)^2=9^2 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=81 \Leftrightarrow x^2+\frac{9}{x^2}=75$$
$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}=75-6 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{x}\right)^2=69 \Leftrightarrow x-\frac{3}{x}=\pm\sqrt{69}$$
Portanto, $a=69$ e a soma de seus algarismos é $6+9=15$.

2) Considere que as pessoas A e B receberão transfusão de sangue. Os aparelhos utilizados por A e B liberam, em 1 minuto, 19 e 21 gotas de sangue, respectivamente, e uma gota de sangue de ambos os aparelhos tem $0,04\ m\ell$. Os aparelhos são ligados simultaneamente e funcionam ininterruptamente até completarem um litro de sangue. O tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B será, em minutos, de aproximadamente:
(A) 125
(B) 135
(C) 145
(D) 155
(E) 165

RESPOSTA: A **(As opções foram alteradas, pois não havia alternativa correta na formulação original da questão)**

RESOLUÇÃO:
O aparelho de A libera 19 gotas de $0,04\ m\ell$ por minuto, ou seja, $19\cdot 0,04\cdot 10^{-3}\ \ell=76\cdot 10^{-5}\ \ell$. O tempo necessário para completar $1\ \ell$ de sangue é $\frac{1}{76\cdot 10^{-5}}=\frac{100000}{76}$ min.

O aparelho de B libera 21 gotas de $0,04\,\text{m}\ell$ por minuto, ou seja, $21\cdot 0,04\cdot 10^{-3}\ \ell = 84\cdot 10^{-5}\ \ell$. O tempo necessário para completar $1\,\ell$ de sangue é $\dfrac{1}{84\cdot 10^{-5}} = \dfrac{100000}{84}\ \text{min}$.

Assim, o tempo que o aparelho de A levará a mais que o aparelho de B é $\dfrac{100000}{76} - \dfrac{100000}{84} = 25000\left(\dfrac{1}{19} - \dfrac{1}{21}\right) = \dfrac{50000}{399} \approx 125\ \text{min}$.

3) A solução real da equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é:
(A) múltiplo de 3.
(B) par e maior do que 17.
(C) ímpar e não primo.
(D) um divisor de 130.
(E) uma potência de 2.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A condição de existência das raízes quadradas é $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$ e $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Portanto, devemos ter $x \geq 1$.

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-1} + x - 1 = 25 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+4)(x-1)} = 22 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)(x-1)} = 11 - x \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+4)(x-1)}\right)^2 = (11-x)^2 \ \wedge\ 11 - x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 121 - 22x + x^2 \ \wedge\ x \leq 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 121 - 22x + x^2 \ \wedge\ x \leq 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x = 125 \ \wedge\ x \leq 11 \Leftrightarrow x = 5$$

Observe que a condição de existência inicial é $x \geq 1$, então $x = 5$ é solução da equação.
Portanto, a solução da equação é um divisor de 130.

2ª SOLUÇÃO:
Lembrando a condição de existência obtida na 1ª solução, devemos ter $x \geq 1$.
Sejam $a = \sqrt{x+4}$ e $b = \sqrt{x-1}$, a equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é equivalente a $a + b = 5$.
Elevando a e b ao quadrado, temos:

$$a^2 = x + 4 \ \wedge\ b^2 = x - 1 \Rightarrow a^2 - b^2 = (x+4) - (x-1) = 5$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 5$$

Substituindo $a + b = 5$ na igualdade acima, obtemos $5\cdot(a-b) = 5 \Leftrightarrow a - b = 1$.

Dessa forma, resulta o sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3 \ \wedge\ b = 2$.

Vamos agora calcular x retornando a substituição. Assim, temos:

$$\sqrt{x+4} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x + 4 = 9 \Leftrightarrow x = 5$$

Observe que $\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$ resulta no mesmo valor. Além disso, cabe notar também que esse valor satisfaz a condição de existência $x \geq 1$.

4) Observe as figuras a seguir.

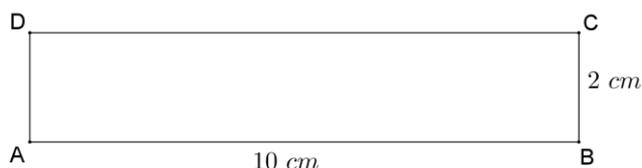
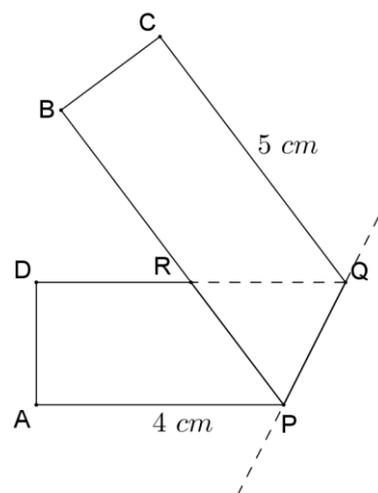



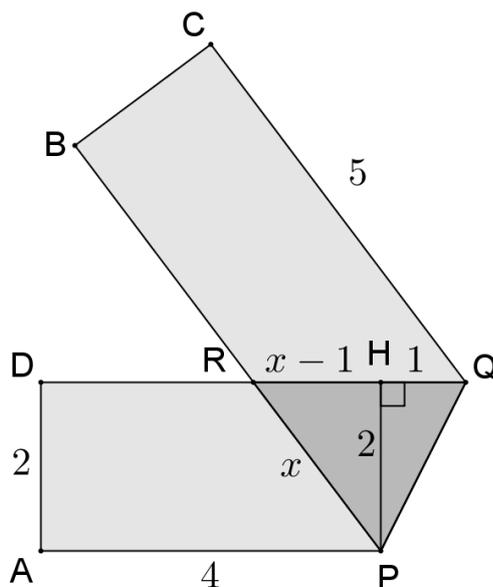
Figura I

Figura II

Uma dobra é feita no retângulo $10\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$ da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono $APQCBRD$ da figura II, em cm^2, é:

(A) $8\sqrt{5}$
(B) 20
(C) $10\sqrt{2}$
(D) $\frac{35}{2}$
(E) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A área do polígono $APQCBRD$ é igual à área do retângulo $ABCD$ menos a área do triângulo PQR.

O polígono APQCBRD é obtido dobrando-se o retângulo ABCD, então $A\hat{P}Q + Q\hat{P}B = 180^\circ$ (*) e $C\hat{Q}P + P\hat{Q}D = 180^\circ$.

Além disso, $AP \parallel DQ$ o que implica $A\hat{P}Q + P\hat{Q}D = 180^\circ$ (**).

Comparando (*) e (**), conclui-se que $Q\hat{P}B = P\hat{Q}D$, ou seja, $Q\hat{P}R = P\hat{Q}R$.

Daí conclui-se que o triângulo PQR é isósceles e $PR = QR = x$.

Traçando-se $PH \perp RQ$, obtemos o retângulo APHD no qual $AP = DH = 4$.

Portanto, $HQ = DQ - DH = 5 - 4 = 1$ e $RH = RQ - HQ = x - 1$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo PHR, temos: $(x-1)^2 + 2^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Logo, $S_{APQCBRD} = S_{ABCD} - S_{PQR} = 10 \cdot 2 - \frac{x \cdot 2}{2} = 20 - x = 20 - \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$ u.a..

5) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60. A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

(A) 0,035

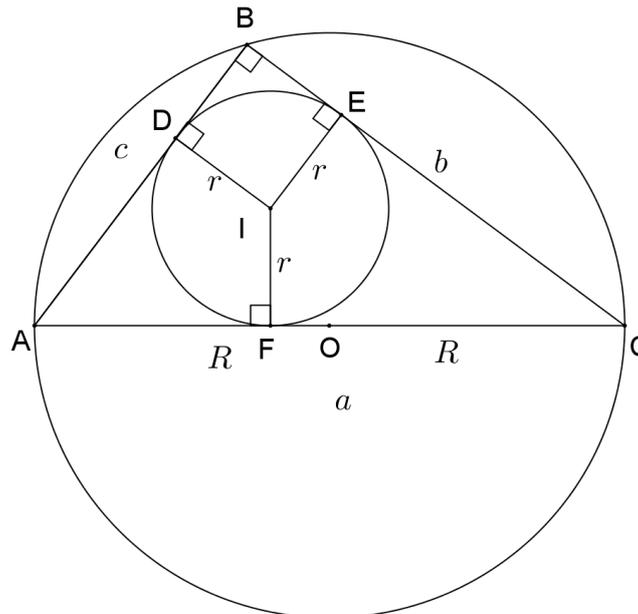
(B) 0,055

(C) 0,075

(D) 0,095

(E) 0,105

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Vamos demonstrar dois resultados que são válidos para qualquer triângulo retângulo.

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a, catetos b e c, semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, raio do círculo inscrito r e raio do círculo circunscrito R.

Os segmentos das tangentes ao círculo inscrito a partir do vértice B são $BD = BE = p - a$. Logo, o quadrilátero $BDIE$ é um quadrado e $\boxed{r = p - a}$.

Além disso, como a hipotenusa do triângulo subentende um ângulo inscrito de 90°, então a hipotenusa $AC = a = 2R \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{a}{2}}$.

No caso em questão, temos $a = 26$ e $2p = 60 \Leftrightarrow p = 30$. Aplicando os resultados obtidos, temos $r = p - a = 30 - 26 = 4$ e $R = \frac{a}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

Portanto, a razão entre as áreas do círculo inscrito e do circunscrito é $\frac{S_{inc}}{S_{circun}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{16}{169} \approx 0,095$.

6) Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados $AC = b$ e $BC = a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

(A) $\frac{a^2}{b^2}$

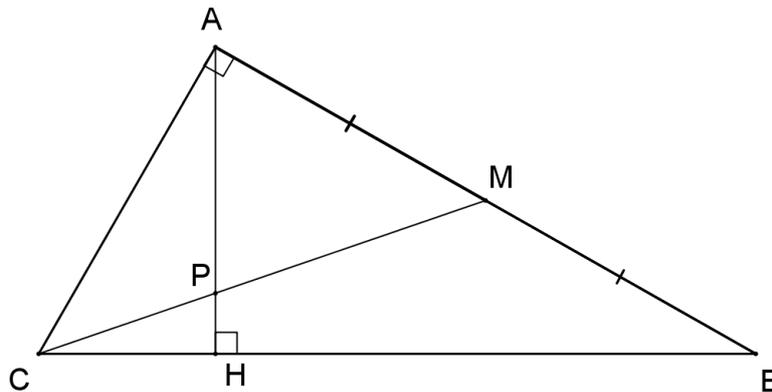
(B) $\frac{a^3}{b^2}$

(C) $\frac{a^2}{b^3}$

(D)

(E) $\frac{a}{b}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo AHB com ceviana CPM, temos:

$$\frac{CH}{CB}\cdot\frac{PA}{PH}\cdot\frac{MB}{MA}=1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PH}=\frac{BC}{CH}.$$

Considerando as relações métricas no triângulo retângulo ABC, temos:

$$AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = a \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{b^2}{a}.$$

Portanto, $\frac{AP}{PH}=\frac{BC}{CH}=\frac{a}{\frac{b^2}{a}}=\frac{a^2}{b^2}$.

7) Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente ao inverso do número $\frac{525}{900}$, então o resto da divisão do período da dízima $\frac{q}{p+1}$ por 5 é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O inverso do número $\frac{525}{900}$ é $\frac{900}{525}=\frac{12}{7}$, em sua forma irredutível. Logo, $p=12$ e $q=7$.

A dízima $\frac{q}{p+1}$ é dada por $\frac{q}{p+1}=\frac{7}{13}=0,\overline{538461}$, onde a barra indica o período.
Portanto, o resto do período da dízima, 538461, por 5 é 1.

8) Um número natural N, quando dividido por 3, 5, 7 ou 11, deixa resto igual a 1. Calcule o resto da divisão de N por 1155, e assinale a opção correta.
(A) 17
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 1

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se N deixa resto 1 na divisão por 3, 5, 7 ou 11, então $N-1$ é múltiplo de 3, 5, 7 ou 11, ou seja, $N-1$ deve ser múltiplo de $\text{mmc}(3,5,7,11)=3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=1155$.
Portanto, $N-1$ é múltiplo de 1155 e o resto da divisão de N por 1155 é 1.

9) Considere o operador matemático $'*'$ que transforma o número real X em $X+1$ e o operador $'\oplus'$ que transforma o número real Y em $\frac{1}{Y+1}$.
Se $\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\left\{\oplus\left[*\left(\oplus\{*1\}\right)\right]\right\}\right)\right]\right\}=\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si, a opção correta é:
(A) $\frac{a}{b}=0,27272727\ldots$
(B) $\frac{b}{a}=0,2702702\ldots$
(C) $\frac{2a}{b}=0,540540540\ldots$
(D) $2b+a=94$
(E) $b-3a=6$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$*1 = 1+1 = 2$

$\oplus\{*1\} = \oplus\{2\} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$*(\oplus\{*1\}) = *\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$

$\oplus[*(\oplus\{*1\})] = \oplus\left[\frac{4}{3}\right] = \frac{1}{\frac{4}{3}+1} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$

$\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\} = \oplus\left\{\frac{3}{7}\right\} = \frac{1}{\frac{3}{7}+1} = \frac{1}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$

$*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right) = *\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}+1 = \frac{17}{10}$

$*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right] = *\left[\frac{17}{10}\right] = \frac{17}{10}+1 = \frac{27}{10}$

$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right]\right\} = \oplus\left\{\frac{27}{10}\right\} = \frac{1}{\frac{27}{10}+1} = \frac{10}{37}$

$\oplus\left\{*\left[*\left(\oplus\{\oplus[*(\oplus\{*1\})]\}\right)\right]\right\} = \frac{a}{b} = \frac{10}{37} \Rightarrow a = 10 \wedge b = 37 \Rightarrow \frac{2a}{b} = \frac{20}{37} = 0,54054054\ldots$

10) Analise as afirmativas abaixo.

I) Se $2^x = A$, $A^y = B$, $B^z = C$ e $C^k = 4096$, então $x \cdot y \cdot z \cdot k = 12$.

II) $t^m + (t^m)^p = (t^m)\left(1+(t^m)^{p-1}\right)$, para quaisquer reais t, m e p não nulos.

III) $r^q + r^{q^w} = (r^q)\left(1+r^{q^{(w-1)}}\right)$, para quaisquer reais q, r e w não nulos.

IV) Se $(10^{100})^x$ é um número que tem 200 algarismos, então x é 2.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são falsas.
(B) Apenas as afirmativas III e IV são falsas.
(C) Apenas as afirmativas I e III são falsas.
(D) Apenas as afirmativas I, II e IV são falsas.
(E) Apenas as afirmativas I, III e IV são falsas.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

I) VERDADEIRA

$C^k = (B^z)^k = B^{z\cdot k} = (A^y)^{z\cdot k} = A^{y\cdot z\cdot k} = (2^x)^{y\cdot z\cdot k} = 2^{x\cdot y\cdot z\cdot k} = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow x\cdot y\cdot z\cdot k = 12$

II) VERDADEIRA

$t^m + (t^m)^p = t^m + t^m \cdot (t^m)^{p-1} = (t^m)\left(1+(t^m)^{p-1}\right)$

III) FALSA
$r^q + r^{q^w} = r^q + r^q \cdot r^{(q^w - q)} = (r^q)\left(1 + r^{(q^w - q)}\right) \neq (r^q)\left(1 + r^{q^{(w-1)}}\right)$,
IV) FALSA
Se $(10^{100})^x$ tem 200 algarismos, então $10^{199} \le (10^{100})^x = 10^{100x} < 10^{200} \Leftrightarrow 1,99 \le x < 2$.

11) Considere a equação do 2° grau $2014x^2 - 2015x - 4029 = 0$. Sabendo-se que a raiz não inteira é dada por $\frac{a}{b}$, onde "a" e "b" são primos entre si, a soma dos algarismos de "a + b" é:
(A) 7
(B) 9
(C) 11
(D) 13
(E) 15

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observamos que $x = -1$ é raiz da equação, pois $2014 \cdot (-1)^2 - 2015 \cdot (-1) - 4029 = 2014 + 2015 - 4029 = 0$. Logo, a equação possui uma raiz inteira $x = -1$ e uma raiz não inteira $\frac{a}{b}$.
O produto das raízes da equação é $\sigma_2 = (-1) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-4029}{2014} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4029}{2014} \Leftrightarrow a = 4029 \wedge b = 2014$ e $a + b = 4029 + 2014 = 6043$ cuja soma dos algarismos é $6 + 4 + 3 = 13$.
Note que $a = 4029 = 3 \cdot 17 \cdot 79$ e $b = 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ não possuem fatores comuns em suas fatorações canônicas, sendo portanto primos entre si.

12) Sobre os números inteiros positivos e não nulos x, y e z, sabe-se:
I) $x \neq y \neq z$
II) $\frac{y}{x - z} = \frac{x + y}{z} = 2$
III) $\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$
Com essas informações, pode-se afirmar que o número $(x - y)\frac{6}{z}$ é:
(A) ímpar e maior do que três.
(B) inteiro e com dois divisores.
(C) divisível por cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) par e menor do que seis.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow z = 3^2 = 9$

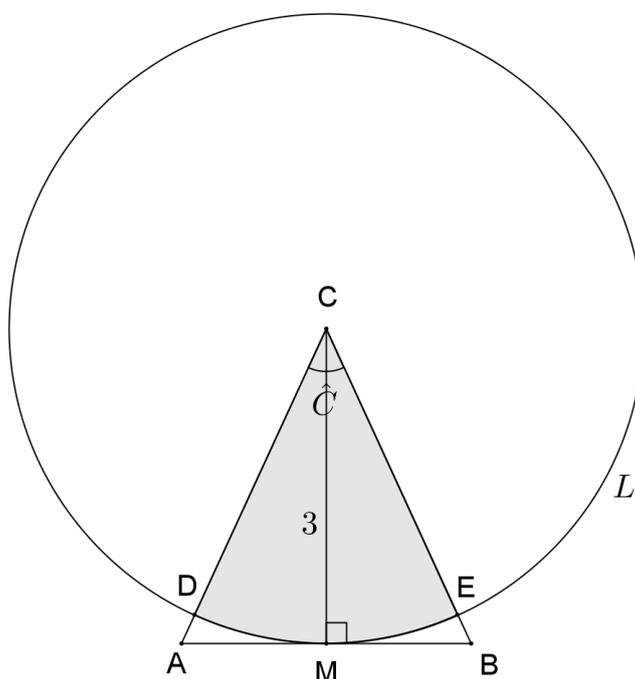
$\frac{y}{x-9} = \frac{x+y}{9} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 18 \\ x + y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12 \ \wedge \ y = 6$

Logo, $(x-y)\frac{6}{z} = (12-6)\frac{6}{9} = 4$ que é um número par e menor do que seis.

13) Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados $AC = BC$, e que "L" seja a circunferência de centro "C", raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:

(A) não possui um valor máximo.
(B) pode ser igual a 5π.
(C) não pode ser igual a 4π.
(D) possui um valor mínimo igual a 2π.
(E) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A área comum S entre o triângulo ABC e o círculo "L" está sombreada na figura e é um setor circular de raio 3 e ângulo $\hat{C}$.

Como o ângulo $\hat{C}$ varia de 0° a 180°, com os dois extremos excluídos, então o valor da área comum varia entre 0 e a área da semicircunferência, ou seja, $0 < S < \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 4,5\pi$.

Portanto, a área comum não possui valor máximo.
Note que o valor $4,5\pi$ é o supremo dessa área (menor dos limitantes superiores), mas não o seu máximo, pois ele nunca é assumido.

14) Considere que N seja um número natural formado apenas por 200 algarismos iguais a 2, 200 algarismos iguais a 1 e 2015 algarismos iguais a zero. Sobre N, pode-se afirmar que:
(A) se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(B) independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.
(C) se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(D) se os algarismos da dezena e da unidade não forem iguais a 1, N será um quadrado perfeito.
(E) se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
(A) FALSA
Se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N)=600+135=735$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.
(B) VERDADEIRA
A soma dos algarismos de N é $S(N)=200\cdot 2+200\cdot 1+2015\cdot 0=600$.
Como $3|600$, então N é múltiplo de 3. Mas, $9\nmid 600$, portanto, N não é múltiplo de 9.
Assim, conclui-se que N não é quadrado perfeito.
(C) FALSA
Se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N)=600+240=840$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.
(D) FALSA
Vide desenvolvimento da alternativa (B).
(E) FALSA
Se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, independentemente das posições dos algarismos, a nova soma dos algarismos de N é $S(N)=600+150=750$ que é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9. Portanto, N não será quadrado perfeito.

15) A equação $K^2x-Kx=K^2-2K-8+12x$, na variável x, é impossível. Sabe-se que a equação na variável y dada por $3ay+\frac{a-114y}{2}=\frac{17b+2}{2}$ admite infinitas soluções. Calcule o valor de $\frac{ab+K}{4}$, e assinale a opção correta.
(A) 0
(B) 1
(C) 3

(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Vamos escrever a equação $K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x$ na forma $Ax = B$. Assim, temos:
$K^2x - Kx = K^2 - 2K - 8 + 12x \Leftrightarrow (K^2 - K - 12)x = K^2 - 2K - 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (K-4)(K+3)x = (K-4)(K+2)$
Como a equação acima é impossível devemos ter
$(K-4)(K+3) = 0 \Leftrightarrow K = 4 \vee K = -3$
$(K-4)(K+2) \neq 0 \Leftrightarrow K \neq 4 \wedge K \neq -2$
Portanto, devemos ter $K = -3$.
Vamos agora escrever a equação $3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2}$ na forma $Ax = B$. Assim, temos:
$3ay + \frac{a - 114y}{2} = \frac{17b + 2}{2} \Leftrightarrow 6ay + a - 114y = 17b + 2 \Leftrightarrow (6a - 114)y = 17b - a + 2$
Como a equação acima admite infinitas soluções, devemos ter
$6a - 114 = 0 \Leftrightarrow a = 19$
$17b - a + 2 = 0 \Rightarrow 17b - 19 + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$
Portanto, devemos ter $a = 19$ e $b = 1$.
Logo, $\frac{ab + K}{4} = \frac{19 \cdot 1 + (-3)}{4} = \frac{16}{4} = 4$.

16) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:
(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

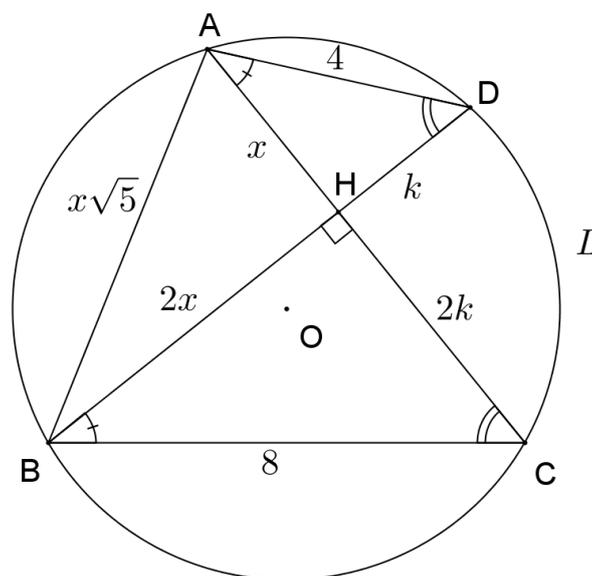
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Sejam $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, as três raízes reais da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
Trocando x por $py + q$, obtém-se uma nova equação $(py + q)^3 - 2(py + q)^2 - (py + q) + 2 = 0$, cujas raízes satisfazem $py + q = r_i$, $i = 1, 2, 3$.
Note que, como p é não nulo, a equação do primeiro grau $py + q = r_i$ possui uma única solução, ou seja, para cada raiz real da equação original, há uma raiz real correspondente na equação transformada. Portanto, a nova equação possui 3 soluções reais.

17) Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que $AD = 4$ e $BC = 8$, calcule o raio de L e assinale a opção correta.

(A) $2\sqrt{10}$
(B) $4\sqrt{10}$
(C) $2\sqrt{5}$
(D) $4\sqrt{5}$
(E) $3\sqrt{10}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que, como o triângulo ABC é acutângulo, seu ortocentro é interior ao triângulo e o ponto D está no menor arco AC. Seja H o pé da altura traçada do vértice B e R o raio do círculo de centro O circunscrito ao triângulo.

Como ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco são iguais, temos: $A\hat{C}B = A\hat{D}B$ e $C\hat{B}D = C\hat{A}D$.

Os triângulos retângulos AHD e BHC são semelhantes, pois possuem ângulos iguais. Assim, temos:

$$\frac{HD}{HC} = \frac{HA}{HB} = \frac{AD}{BC} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow \frac{HD}{HC} = \frac{HA}{HB} = \frac{1}{2}.$$

Sejam $HA = x$ e $HD = k$, então $HB = 2x$ e $HC = 2k$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2 \Leftrightarrow x^2 + (2x)^2 = 5x^2 \Leftrightarrow AB = x\sqrt{5}.$$

Vamos agora calcular a área do triângulo ABC de duas formas diferentes.

$$S_{ABC} = S_{AHB} + S_{CHB} = \frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{2x \cdot 2k}{2} = x^2 + 2kx$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = \frac{x\sqrt{5} \cdot (x + 2k) \cdot 8}{4R} = \frac{2\sqrt{5}\left(x^2 + 2kx\right)}{R}$$

Igualando as duas expressões de S_{ABC}, temos: $x^2 + 2kx = \frac{2\sqrt{5}(x^2 + 2kx)}{R} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{5}$ u.c..

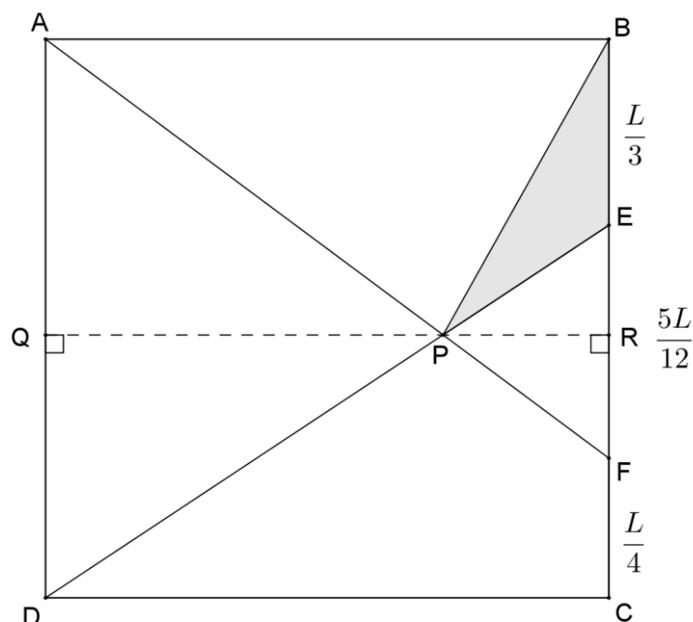
18) Sabendo que $2014^4 = 16452725990416$ e que $2014^2 = 4056196$, calcule o resto da divisão de 16452730046613 por 4058211, e assinale a opção que apresenta esse valor.
(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Como $16452730046613 = 16452725990416 + 4056196 + 1$ e $4058211 = 4056196 + 2014 + 1$, é conveniente fazer $2014 = x$.
Assim, o problema torna-se obter o resto da divisão de $x^4 + x^2 + 1$ por $x^2 + x + 1$.
Vamos fatorar $x^4 + x^2 + 1$. Assim, temos:
$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$
Portanto, o resto da divisão de $x^4 + x^2 + 1$ por $x^2 + x + 1$ é zero, o que implica que o resto de 16452730046613 por 4058211 também é zero.

19) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos "E" e "F" tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em "P", qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Seja L o lado do quadrado $ABCD$.

Vamos analisar os pontos de divisão do lado BC.

$$\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{BE}{L}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow BE=\frac{L}{3}$$

$$\frac{CF}{BC}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{CF}{L}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow CF=\frac{L}{4}$$

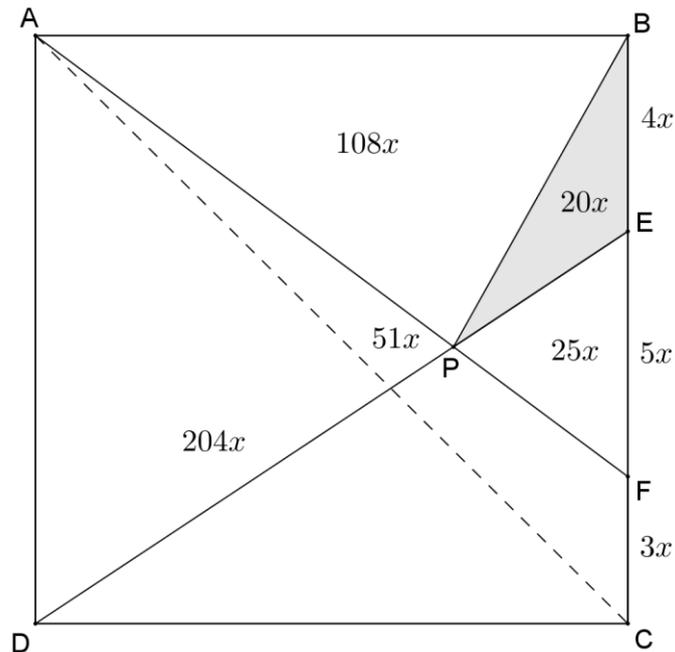
O segmento EF é então dado por $EF=BC-BE-CF=L-\frac{L}{3}-\frac{L}{4}=\frac{5L}{12}$.

Como $EF \| AD$, os triângulos EPF e DPA são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{PR}{PQ}=\frac{EF}{AD}=\frac{5L/12}{L}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow\frac{PR}{5}=\frac{PQ}{12}=\frac{PR+PQ}{5+12}=\frac{L}{17}\Leftrightarrow PR=\frac{5L}{17}\wedge PQ=\frac{12L}{17}.$$

A área do triângulo BPE é dada por $S_{BPE}=\frac{BE\cdot PR}{2}=\frac{\frac{L}{3}\cdot\frac{5L}{17}}{2}=\frac{5L^2}{102}$.

Assim, $\frac{S_{BPE}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{5L^2}{102}}{L^2}=\frac{5}{102}\approx 5\%$.

Vamos fazer uma solução alternativa, utilizando razões entre áreas.

Supondo, sem perda de generalidade, que o lado do quadrado $ABCD$ é igual a $12x$. Assim, temos:

$\frac{BE}{BC} = \frac{BE}{12x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow BE = 4x$

$\frac{CF}{BC} = \frac{CF}{12x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow CF = 3x$

O segmento EF é então dado por $EF = BC - BE - CF = 12x - 4x - 3x = 5x$.

Como $EF \parallel AD$, os triângulos EPF e DPA são semelhantes. Assim, temos:

$\frac{PF}{PA} = \frac{PE}{PD} = \frac{EF}{AD} = \frac{5x}{12x} = \frac{5}{12}$.

Vamos agora identificar a área do triângulo BPE. Seja $S_{EPF} = 25s$ e, considerando que triângulos de mesmo vértice a base sobre a mesma reta possuem áreas proporcionais às medidas de suas bases, temos:

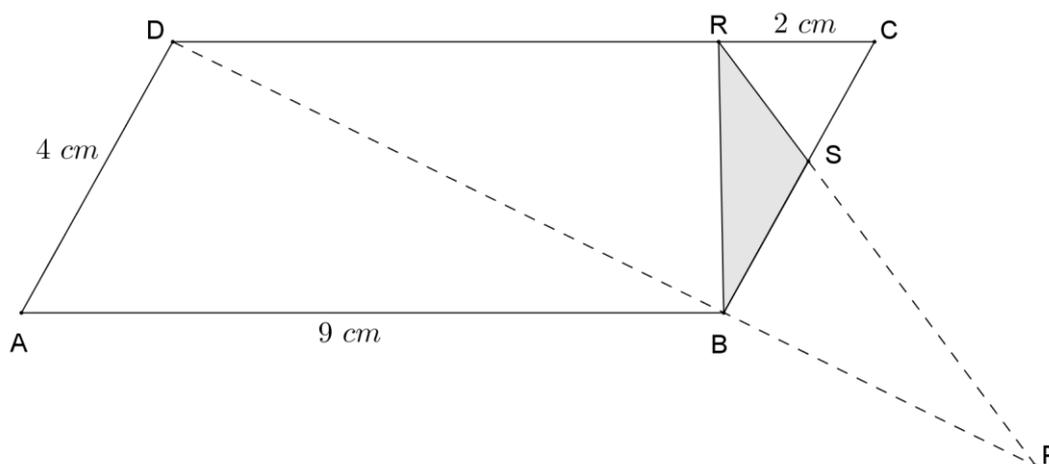
$\frac{S_{EPF}}{S_{EPB}} = \frac{EF}{EB} = \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{25s}{S_{EPB}} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow S_{EPB} = 20s$

$\frac{S_{FBP}}{S_{PBA}} = \frac{PF}{PA} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{45s}{S_{PBA}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow S_{PBA} = 108s$

$\frac{S_{BAF}}{S_{FAC}} = \frac{BF}{CF} = \frac{9x}{3x} = 3 \Leftrightarrow \frac{153s}{S_{FAC}} = 3 \Leftrightarrow S_{FAC} = 51s$

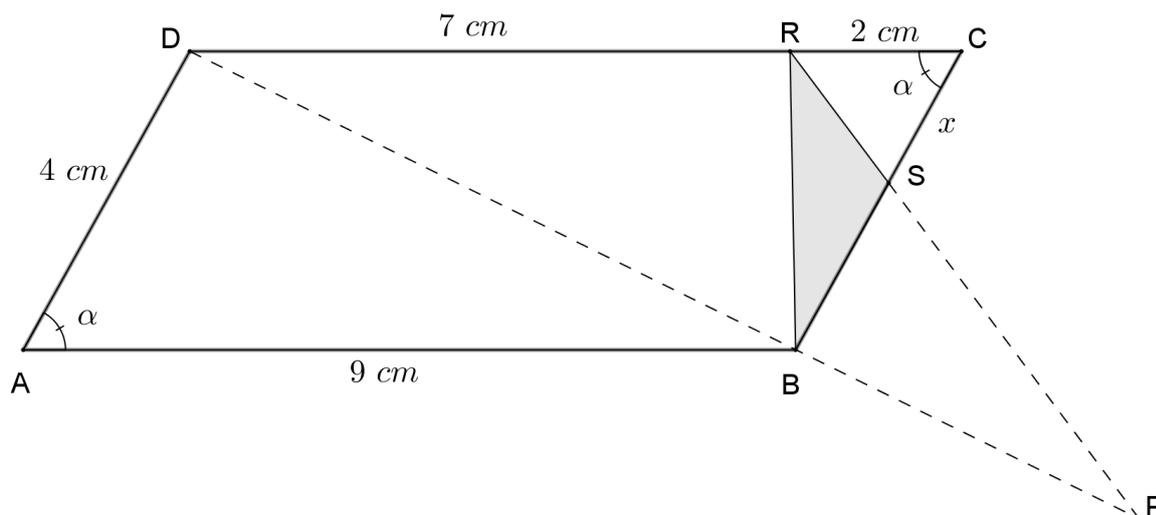
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 204s = 408s$

Portanto, a razão entre a área do triângulo BPE e a área do quadrado $ABCD$ é $\frac{S_{BPE}}{S_{ABCD}} = \frac{20s}{408s} = \frac{5}{102} \approx 5\%$.

20) Observe a figura a seguir.

Na figura, o paralelogramo $ABCD$ tem lados 9 cm e 4 cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que $CR = 2\text{ cm}$; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $\frac{1}{36}$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

(A) $13,5$
(B) 11
(C) $10,5$
(D) 9
(E) $7,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \text{sen}\,\alpha = 9 \cdot 4 \cdot \text{sen}\,\alpha = 36\,\text{sen}\,\alpha$

$$S_{BCR} = \frac{CR \cdot CB}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{CRS} = \frac{CR \cdot CS}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cdot x}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = x \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{BRS} = S_{BCR} - S_{CRS} = 4 \operatorname{sen} \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = (4 - x) \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{S_{BRS}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{(4-x) \operatorname{sen} \alpha}{36 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow 4 - x = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCD com ceviana PSR, temos:

$$\frac{PB}{PD} \cdot \frac{SC}{SB} \cdot \frac{RD}{RC} = 1 \Leftrightarrow \frac{PB}{PD} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{DP}{BP} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2013/2014

1) Sejam $P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)$ e $Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $\sqrt{5}$
(D) 3
(E) 5

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}$$

$$Q=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\cdot\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}=\frac{12}{3}=4\Rightarrow\sqrt{\frac{P}{Q}}=\sqrt{4}=2$$

2) Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $BC=a$, qual é o valor máximo da área de ABC?

(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

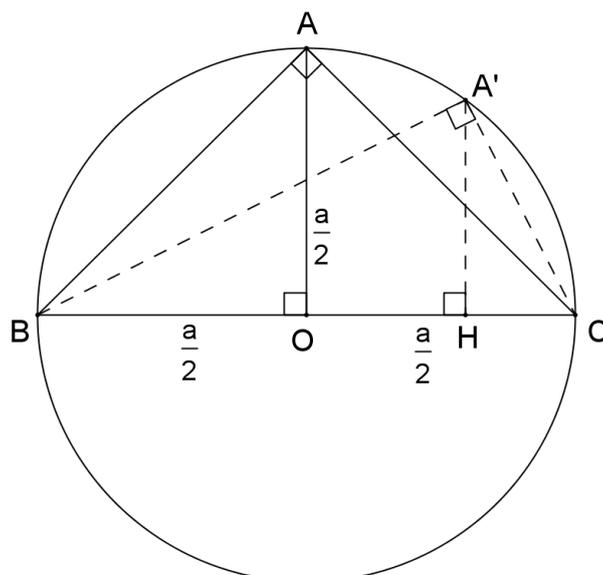
(B) $\frac{a^2}{4}$

(C) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$

(D) $\frac{3a^2}{4}$

(E) $\frac{3a^2}{2}$

REPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O triângulo retângulo ABC de hipotenusa $BC = a$ está inscrito em uma circunferência de diâmetro BC. Assim, cada ponto sobre essa circunferência (exceto B e C) determina um triângulo retângulo ABC.

A área de cada um desses triângulos é dada pelo semiproduto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa, ou seja, $S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2}$. Sabendo que a medida da hipotenusa é constante, então o triângulo de área máxima será aquele que tiver a altura relativa à hipotenusa máxima. Como o vértice A está sobre a circunferência de diâmetro $BC = a$, então o valor máximo da altura relativa à hipotenusa é igual ao raio da circunferência, ou seja, $(h_A)_{MAX} = \frac{a}{2}$.

Portanto, o valor da área máxima do triângulo retângulo ABC é

$(S_{ABC})_{MAX} = \frac{a \cdot (h_A)_{MAX}}{2} = \frac{a \cdot (a/2)}{2} = \frac{a^2}{4}$ unidades de área.

3) Considere um conjunto de 6 meninos com idades diferentes e um outro conjunto com 6 meninas também com idades diferentes. Sabe-se que, em ambos os conjuntos, as idades variam de 1 ano até 6 anos. Quantos casais podem-se formar com a soma das idades inferior a 8 anos?

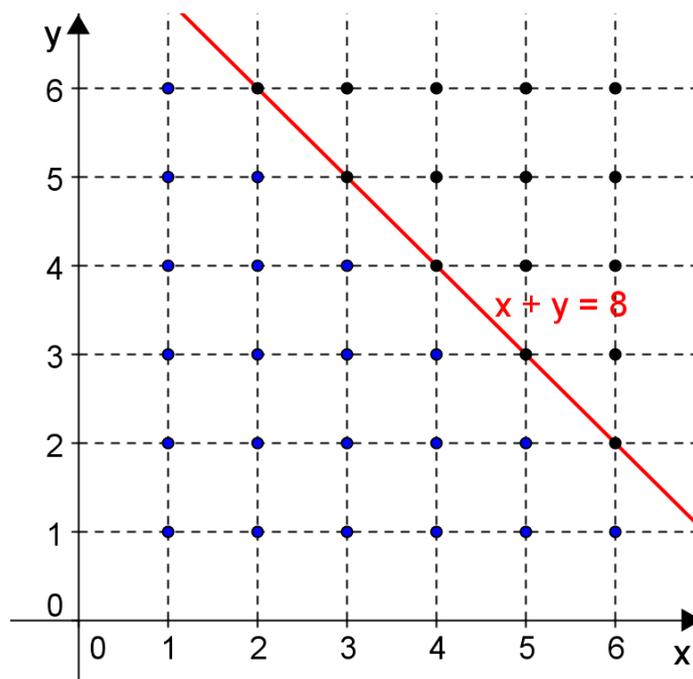
(A) 18
(B) 19
(C) 20
(D) 21
(E) 22

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Tendo em consideração que a soma das idades dos membros de um casal deve ser menor do que 8, temos as seguintes possibilidades para a formação de casais:
O menino de 1 ano pode fomar casal com qualquer menina, então há 6 possíveis casais.
O menino de 2 anos pode formar casal com meninas de 1 a 5 anos, então há 5 possíveis casais.

O menino de 3 anos pode formar casal com meninas de 1 a 4 anos, então há 4 possíveis casais.
O menino de 4 anos pode formar casal com meninas de 1 a 3 anos, então há 3 possíveis casais.
O menino de 5 anos pode formar casal com meninas de 1 ou 2 anos, então há 2 possíveis casais.
O menino de 6 anos pode formar casal com a menina de 1 ano, então há 1 possível casal.

Portanto, o número de casais que se pode formar é $6+5+4+3+2+1=\frac{7\cdot 6}{2}=21$.

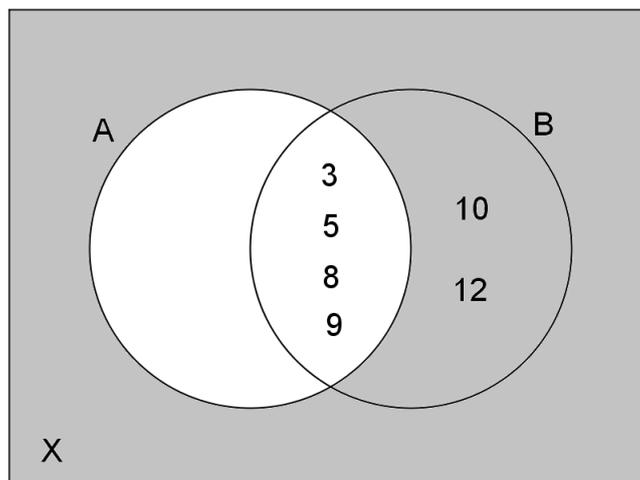
Observe que se representássemos as idades no plano cartesiano com as idades dos meninos nas abscissas e das meninas na ordenadas, teríamos uma malha de $6\cdot 6=36$ pontos que representariam possíveis casais e os casais com soma das idades inferior a 8 anos seriam os pontos abaixo da reta $x+y=8$ (marcados de azul na figura).

4) Seja $A\cup B=\{3,5,8,9,10,12\}$ e $B\cap C_X^A=\{10,12\}$ onde A e B são subconjuntos de X, e C_X^A é o complementar de A em relação a X. Sendo assim, pode-se afirmar que o número máximo de elementos de B é

(A) 7
(B) 6
(C) 5
(D) 4
(E) 3

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que, se $A\subset X$, então o complementar de A em relação a X está definido e $C_X^A=X-A$.

Se $B\cap C_X^A=\{10,12\}$, então 10 e 12 são elementos de B e não são elementos de A.

Se $A \cup B = \{3,5,8,9,10,12\}$, então $B \subset \{3,5,8,9,10,12\}$. Portanto, $\#(B) \leq 6$.
Observe, no entanto, que $B = \{3,5,8,9,10,12\}$ e $A = \{3,5,8,9\}$ satisfazem às condições do enunciado, então o número máximo de elementos de B é 6.
Observe a situação descrita acima representada em um diagrama de Venn, onde a área sombreada representa $C_X^A = X - A$:

Note que o número máximo de elementos do conjunto B ocorre quando todos os elementos do conjunto $\{3,5,8,9\}$ estão em $A \cap B$.

5) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0$, qual é a soma das duas maiores raízes reais desta equação?
(A) 0
(B) 1
(C) $\sqrt{6}-\frac{1}{2}$
(D) $\sqrt{6}$
(E) $\sqrt{6}+1$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(As opções dessa questão foram alteradas, pois não havia opção correta da maneira como a questão foi proposta originalmente.)**

Observemos inicialmente que $(x+3)+(x-2)=2x+1$, então uma boa substituição de variável é $y = \frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y - \frac{1}{2}$. Dessa forma, temos:

$$(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0 \Rightarrow (2y)^2 \cdot \left(y-\frac{1}{2}+3\right)\cdot\left(y-\frac{1}{2}-2\right)+6=0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 \cdot \left(y+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{5}{2}\right)+6=0 \Leftrightarrow 4y^2 \cdot \left(y^2-\frac{25}{4}\right)+6=0$$

$$\Leftrightarrow 4y^4-25y^2+6=0$$

Note que a substituição de variável efetuada apresentou como resultado uma equação biquadrada. Vamos resolvê-la.

$$y^2 = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{25 \pm 23}{8} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \ \vee \ y^2 = 6 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2} \ \vee \ y = \pm\sqrt{6}$$

Retornando a substituição, temos:

$$x_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -1; \ x_2 = \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0; \ x_3 = -\sqrt{6} - \frac{1}{2}; \ x_4 = \sqrt{6} - \frac{1}{2}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{-\sqrt{6} - \frac{1}{2}, -1, 0, \sqrt{6} - \frac{1}{2}\right\}$ e a soma das duas maiores raízes reais é $0 + \left(\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} - \frac{1}{2}$.

Uma solução alternativa e, talvez, mais intuitiva seria efetuar a conta e identificar raízes por inspeção.

$$(2x+1)^2 (x+3)(x-2) + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(4x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 + x - 6\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 8x^3 - 19x^2 - 23x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^3 + 8x^2 - 19x - 23\right) = 0$$

Por inspeção, identificamos que $x = -1$ é raiz da equação $4x^3 + 8x^2 - 19x - 23 = 0$, pois $4 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 - 19 \cdot (-1) - 23 = 0$, ou seja, $x + 1$ é um fator de $4x^3 + 8x^2 - 19x - 23$.

Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de $4x^3 + 8x^2 - 19x - 23$ por $x + 1$.

	4	8	–19	–23
–1	4	4	–23	0

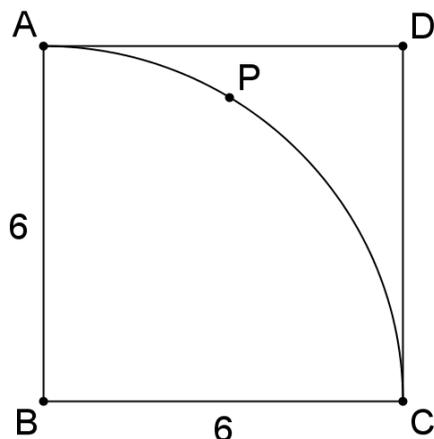
Assim, temos $4x^3 + 8x^2 - 19x - 23 = (x+1)\left(4x^2 + 4x - 23\right)$.

Portanto, a equação original pode ser escrita como $x(x+1)\left(4x^2 + 4x - 23\right) = 0$.

As raízes da equação do 2º grau $4x^2 + 4x - 23 = 0$ são dadas por

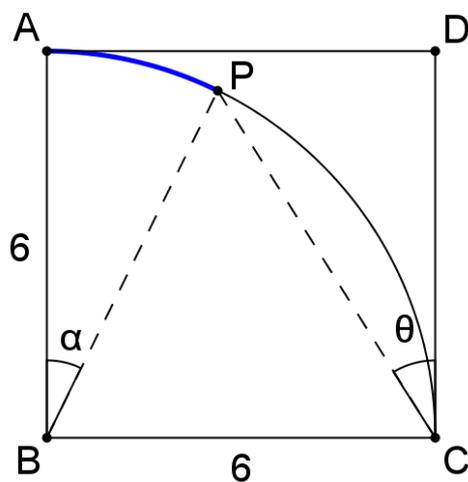
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-23)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 8\sqrt{6}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{6}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{-\sqrt{6} - \frac{1}{2}, -1, 0, \sqrt{6} - \frac{1}{2}\right\}$ e a soma das duas maiores raízes reais é $0 + \left(\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} - \frac{1}{2}$.

6) Analise a figura a seguir.

A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB = 6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

(A) 36°
(B) 30°
(C) 28°
(D) 24°
(E) 20°

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Na figura acima, sejam $A\hat{B}P = \alpha$ e $P\hat{C}D = \theta$.
O comprimento de um arco de circunferência de raio r determinado por um ângulo central α rad é $\ell = \alpha \cdot r$.

Logo, se o arco AP tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, então o ângulo $A\hat{B}P$ em radianos é dado por $\alpha \cdot 6 = \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

Como o $\#ABCD$ é um quadrado, então $A\hat{B}C = 90^\circ$ e $P\hat{B}C = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

O ângulo $P\hat{B}C = 72^\circ$ é o ângulo central que determina o arco PC, então $PC = 72^\circ$.

Como $CD \perp BC$, então o ângulo $P\hat{C}D = \theta$ é um ângulo de segmento, o que implica $\theta = \frac{PC}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

7) Qual é o valor da expressão $\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}}$?

(A) $0,3$
(B) $\sqrt[3]{3}$
(C) 1
(D) 0
(E) -1

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[\left(3^{1/3}\right)^{27} + 2^{2^1} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{64}} - \left(3^{1/3}\right)^{27}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[2^2 - \sqrt[5]{239 + 4}\right]^{\sqrt[7]{92}} = \left[4 - \sqrt[5]{243}\right]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= \left[4 - \sqrt[5]{3^5}\right]^{\sqrt[7]{92}} = [4 - 3]^{\sqrt[7]{92}} = (1)^{\sqrt[7]{92}} = 1$$

8) Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II - Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III - Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, ABC é retângulo.

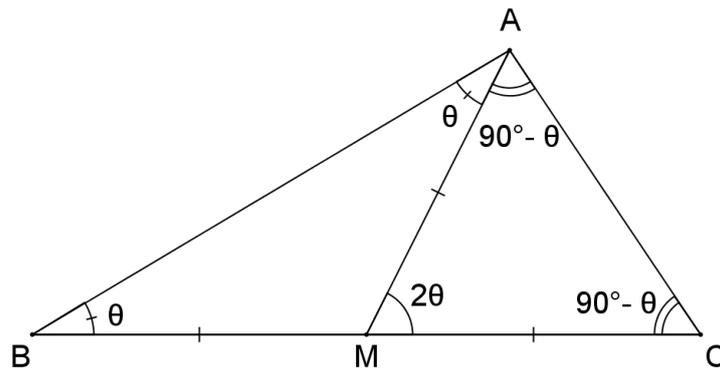
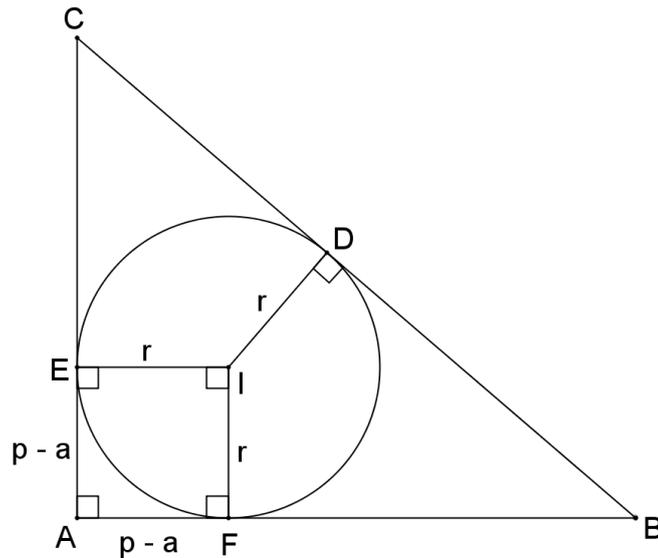
IV – Se ABC é retângulo, então o raio de seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(C) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA
Se $\hat{A} = 90^\circ$, então o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $BC = a$ e vale o teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.
II – VERDADEIRA
Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo oposto ao lado $BC = a$ é reto, ou seja, $\hat{A} = 90^\circ$. Esse resultado é uma consequência da recíproca do teorema de Pitágoras, da Síntese de Clairaut ou da lei dos cossenos, como mostraremos a seguir.
Pela lei dos cossenos, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$. Substituindo $a^2 = b^2 + c^2$ na expressão anterior, resulta $b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Leftrightarrow 2bc \cdot \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.
III – VERDADEIRA
A afirmação estabelece que se a medida de uma mediana é igual à metade da medida do lado a que ela se refere, então o triângulo é retângulo. Nós sabemos que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa, o que é pedido é a “volta” dessa afirmação.
Vamos analisar a situação com auxílio da figura a seguir:

Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, então $AM = BM = CM$ e os triângulos AMB e AMC são isósceles.
Fazendo $A\hat{B}M = B\hat{A}M = \theta$, o ângulo externo $A\hat{M}C$ é tal que $A\hat{M}C = A\hat{B}M + B\hat{A}M = \theta + \theta = 2\theta$.
No triângulo isósceles AMC, temos $C\hat{A}M = A\hat{C}M = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta$.
Portanto, o ângulo do vértice A é dado por $\hat{A} = B\hat{A}C = B\hat{A}M + C\hat{A}M = \theta + (90^\circ - \theta) = 90^\circ$, ou seja, o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa BC.
IV – FALSA
Lema: Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $BC = a$ e semiperímetro p, então o raio do círculo inscrito é $r = p - a$.

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{IE} \perp \overline{AC} \ \wedge \ \overline{IF} \perp \overline{AB} \\ \overline{IE} = \overline{IF} = r\end{array}\right\} \Rightarrow \# IEAF \text{ é um quadrado} \Rightarrow r = \overline{AE} = \overline{AF} = p - a$$

Voltando a afirmação do enunciado e usando a expressão $r = p - a$, temos:

$$r = p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} < \frac{a+a-a}{2} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4}a .$$

9) Assinale a opção que apresenta o conjunto solução da equação $\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0$, no conjunto dos números reais.

(A) $\{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$

(B) $\{\sqrt{13}\}$

(C) $\{-\sqrt{13}\}$

(D) $\{0\}$

(E) $\varnothing$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = -3$$

Como no conjunto dos números reais $\sqrt{x^2-4}$ é sempre maior ou igual a 0, então o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

10) Seja a, b, x, y números naturais não nulos. Se $a \cdot b = 5$, $k = \dfrac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ e $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$, qual é o algarismo das unidades do número $\left(y^x - x^y\right)$?

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 8

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = 2^{(a+b)^2-(a-b)^2} = 2^{4ab} = \left(2^4\right)^{ab} = 16^5$$

$$x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k} = \sqrt[5]{16^5} = 16 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 16$$

Logo, $(x+y)$ e $(x-y)$ são divisores naturais de 16, ou seja, pertencem ao conjunto $d(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

Note que $(x+y)+(x-y) = 2x$, então $(x+y)$ e $(x-y)$ têm a mesma paridade.

Além disso, como x e y são números naturais não nulos, então $x + y > x - y$.

Dessa forma, devemos ter $x + y = 8$ e $x - y = 2$, o que implica $x = 5$ e $y = 3$.

Portanto, $\left(y^x - x^y\right) = \left(3^5 - 5^3\right) = (243 - 125) = 118$, cujo algarismo das unidades é 8.

11) Sabe-se que a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número $\dfrac{1}{k}$ é

(A) natural.
(B) decimal exato.
(C) dízima periódica simples.
(D) dízima periódica composta.
(E) decimal infinito sem período.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Cada algarismo de 1 a 9 aparece 9 vezes como algarismo das unidades e 10 vezes como algarismo das dezenas. Portanto, a soma dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é dada por

$$S = (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot 19 = \frac{(1+9) \cdot 9}{2} \cdot 19 = 45 \cdot 19$$

Desde 10 até 99, inclusive, há $(99-10)+1=90$ números de 2 algarismos, ou seja, um total de $2\cdot 90=180$ algarismos.
Logo, a média aritmética dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é dada por $k=\frac{45\cdot 19}{180}=\frac{19}{4}$.
Assim, $\frac{1}{k}=\frac{4}{19}$ que só possui fatores diferentes de 2 e 5 no denominador, o que implica que o número $\frac{1}{k}$ é uma dízima periódica simples.

12) Uma das raízes da equação do 2° grau $ax^2+bx+c=0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a\neq 0$, é igual a 1. Se $b-c=5a$ então, b^c em função de a é igual a
(A) $-3a^2$
(B) 2^a
(C) $2a\cdot 3^a$
(D) $\frac{1}{(2a)^{3a}}$
(E) $\frac{1}{2^{(3a)}\cdot a^{(3+a)}}$

RESPOSTA: D

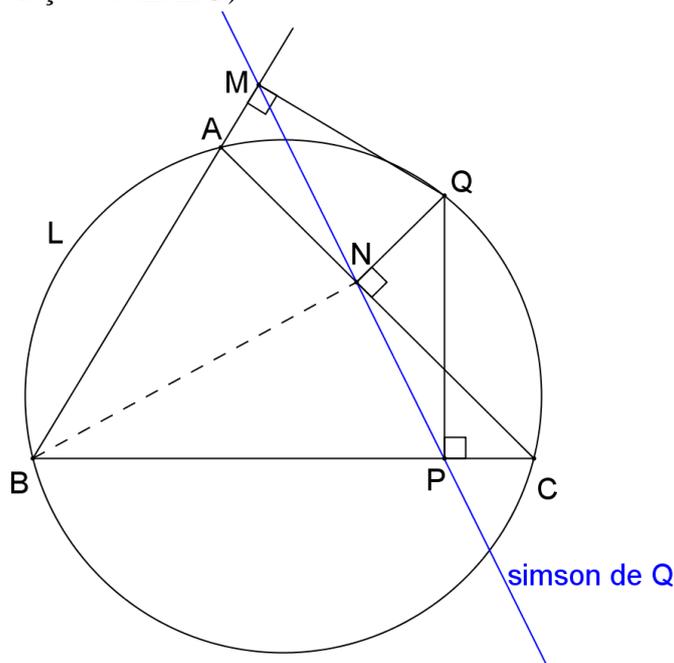
RESOLUÇÃO:
Se 1 é raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, então $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0 \Leftrightarrow a+b+c=0 \Leftrightarrow b+c=-a$.
Dessa forma, b e c ficam determinados, em função de a, pelo sistema: $\begin{cases} b+c=-a \\ b-c=5a \end{cases}$.
Resolvendo o sistema, temos $b=2a$ e $c=-3a$.
Portanto, $b^c=(2a)^{-3a}=\frac{1}{(2a)^{3a}}$.

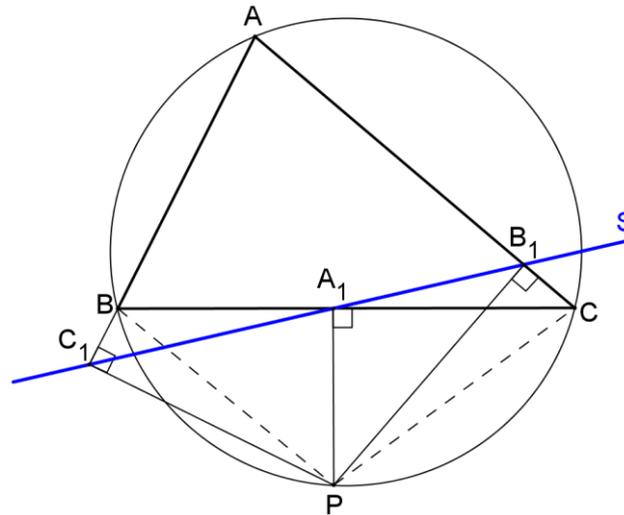
13) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN=12$ e $PN=16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?
(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{9}{16}$
(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{25}{36}$

(E) $\frac{36}{49}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que os pontos M, N e P são colineares (esses pontos estão sobre a reta simson do ponto Q em relação ao ΔABC).

Como os pontos M, N e P são colineares, então os triângulos BMN e BNP têm bases sobre a mesma reta suporte (a simson de Q), o que implica que os triângulos possuem altura comum no vértice B.
Sabemos que, para triângulos que possuem altura comum, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim, temos:
$\frac{S_{BMN}}{S_{BNP}} = \frac{MN}{PN} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

NOTA 1: Reta Simson
Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados do triângulo são colineares, sendo a reta que contém esses três pontos chamada **reta de simson do ponto P**.

Demonstração:

$B\hat{C}_1P = B\hat{A}_1P = 90^o \Rightarrow B\hat{C}_1P + B\hat{A}_1P = 180^o \Rightarrow \# BA_1PC_1$ é inscritível $\Rightarrow B\hat{P}C_1 = B\hat{A}_1C_1$

$P\hat{A}_1C = P\hat{B}_1C = 90^o \Rightarrow \# PA_1B_1C$ é inscritível $\Rightarrow C\hat{A}_1B_1 = C\hat{P}B_1$

$A\hat{C}_1P = A\hat{B}_1P = 90^o \Rightarrow A\hat{C}_1P + A\hat{B}_1P = 180^o \Rightarrow \# AB_1PC_1$ é inscritível $\Rightarrow B_1\hat{P}C_1 = 180^o - \hat{A}$

P está no círculo circunscrito ao $\Delta ABC \Rightarrow \# ABPC$ é inscritível $\Rightarrow B\hat{P}C = 180^o - \hat{A}$

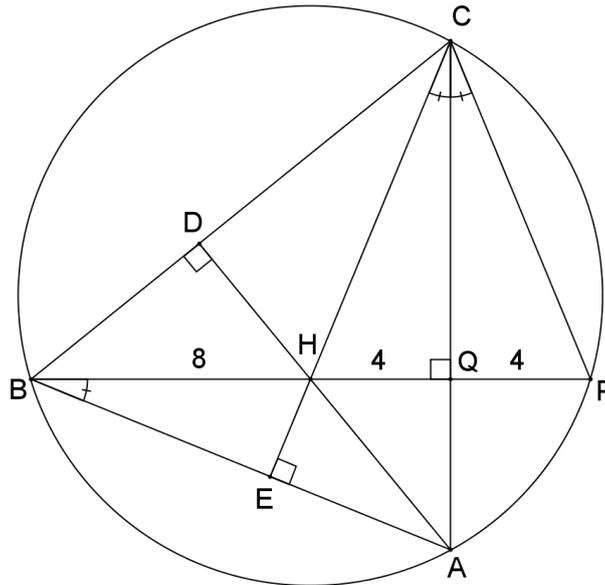
$\Rightarrow B_1\hat{P}C_1 = B\hat{P}C \Rightarrow B_1\hat{P}B + B\hat{P}C_1 = B\hat{P}B_1 + B_1\hat{P}C \Leftrightarrow B\hat{P}C_1 = B_1\hat{P}C \Rightarrow B\hat{A}_1C_1 = C\hat{A}_1B_1$

Logo, os pontos C_1, A_1 e B_1 são colineares.

14) Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que $BQ = 12$ e $HQ = 4$, qual é o valor de QP?

(A) 8
(B) 6
(C) 5,5
(D) 4,5
(E) 4

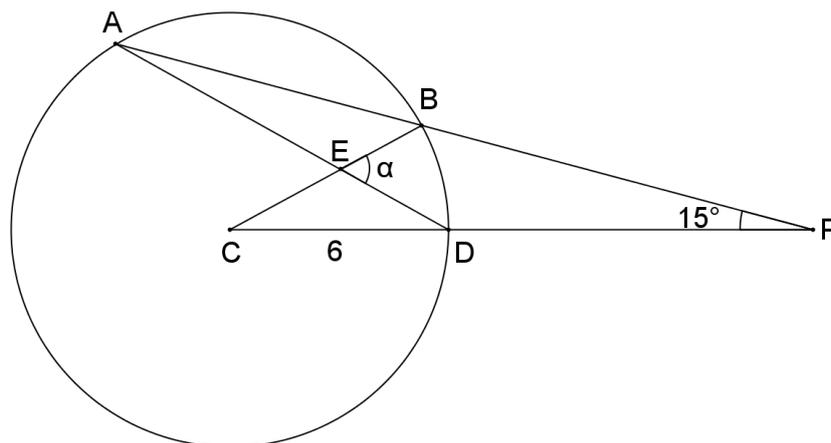
RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Se o ortocentro de um triângulo é interior ao triângulo, então esse triângulo é acutângulo.
Sejam AD e CE as outras duas alturas do triângulo, então o ortocentro H é o ponto de interseção de BQ, AD e CE.

Como $B\hat{E}C = C\hat{Q}B = 90^\circ$, então o $\#BEQC$ é inscritível e $A\hat{B}P = A\hat{C}E$.

Mas, o ângulo inscrito $A\hat{C}P$ é tal que $A\hat{C}P = \frac{AP}{2} = A\hat{B}P = A\hat{C}E$.

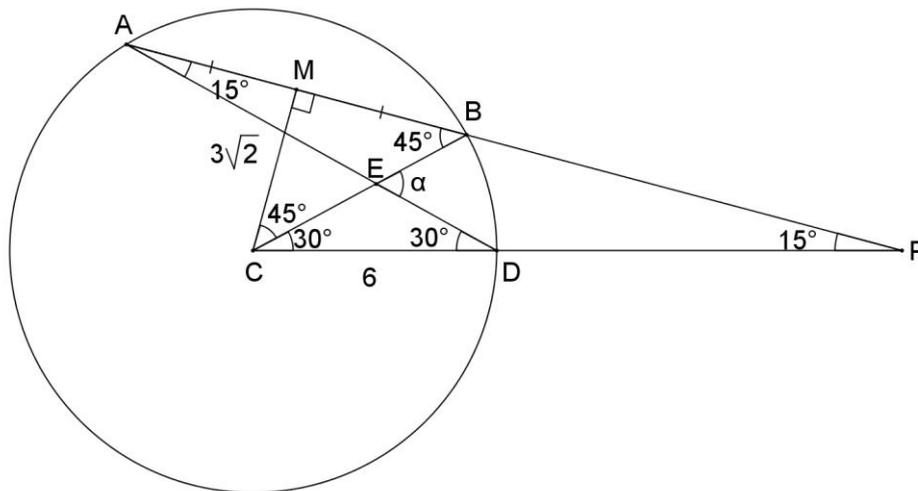
Portanto, no triângulo HCP, a ceviana CQ é altura e bissetriz, o que implica que o triângulo HCP é isósceles e CQ é também mediana. Logo, $HQ = QP = 4$ u.c..

15) Analise a figura a seguir.

Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traçam-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traçam-se ainda os segmentos AD e CD, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

(A) 75°

(B) 60°
(C) 45°
(D) 30°
(E) 15°

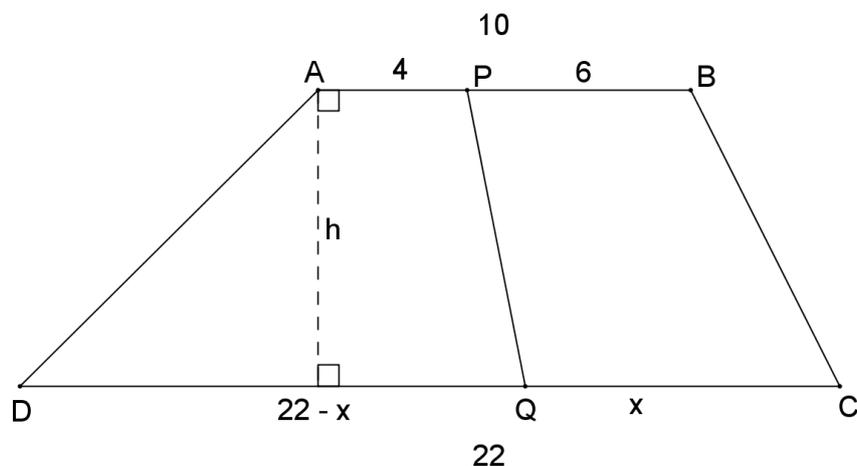
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja M o ponto médio do segmento AB, então $CM \perp AB$, o que implica $CM = 3\sqrt{2}$ (distância do ponto C ao segmento AB).
No triângulo retângulo BMC, temos $CB = 6$ e $CM = 3\sqrt{2}$, então
$\text{sen}\, C\hat{B}M = \frac{CM}{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}M = 45^\circ$ e $B\hat{C}M = 45^\circ$.
No triângulo retângulo PMC, temos $P\hat{C}M = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, então
$D\hat{C}B = D\hat{C}M - B\hat{C}M = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.
Como o ângulo $D\hat{C}B = 30^\circ$ é um ângulo central, então $BD = 30^\circ$ e o ângulo inscrito
$B\hat{A}D = \frac{BD}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.
O ângulo $A\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo ADP, então $A\hat{D}C = D\hat{A}P + D\hat{P}A = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.
O ângulo $B\hat{E}D = \alpha$ é ângulo externo do triângulo CDE, então $\alpha = E\hat{C}D + E\hat{D}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

16) Considere que $ABCD$ é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases $AB = 10$ e $CD = 22$. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que $AP = 4$ e $CQ = x$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:
(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 15

(E) 16

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Sabendo que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD, então $AB \parallel CD$.
Os quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ possuem bases sobre os segmentos paralelos AB e CD, então são trapézio de mesma altura h (distância entre AB e CD).
Como os quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ possuem a mesma área, então temos:

$$S_{APQD} = S_{PBCQ} \Leftrightarrow (22 - x + 4) \cdot \frac{h}{2} = (x + 6) \cdot \frac{h}{2} \Leftrightarrow 26 - x = x + 6 \Leftrightarrow x = 10 \text{ u.c.}.$$

17) O maior inteiro "n", tal que $\frac{n^2 + 37}{n + 5}$ também é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a
(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 14

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\frac{n^2 + 37}{n + 5} = \frac{n^2 - 25 + 25 + 37}{n + 5} = \frac{(n + 5)(n - 5) + 62}{n + 5} = (n - 5) + \frac{62}{n + 5} \in \mathbb{Z}$$

Para que o número acima seja inteiro, $(n + 5)$ deve ser divisor de 62.
O maior inteiro n para o qual $(n + 5)$ é divisor de 62 ocorre quando $(n + 5)$ é igual ao maior divisor inteiro de 62, ou seja, o próprio 62. Assim, temos: $n + 5 = 62 \Leftrightarrow n = 57$ cuja soma dos algarismos é $5 + 7 = 12$.

18) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \end{cases}$, qual é o valor de $16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4$?

(A) 4

(B) $\dfrac{1}{18}$

(C) $\dfrac{1}{12}$

(D) 18

(E) $\dfrac{1}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que a condição $b \neq 4a$ garante que o denominador $4a-b$ que aparece no sistema é não nulo.

$$\begin{cases} 1+\dfrac{2}{ab}=5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{ab}=4 \Leftrightarrow ab=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \Leftrightarrow 5-2b^2=16a^2-b^2 \Leftrightarrow 16a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$$16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4=a^2b^2\left(16a^2+b^2\right)-8a^3b^3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 5-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

19) Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.

(A) 12

(B) 10

(C) 8

(D) 6

(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (2\cdot 17)^y = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 2^y \cdot 17^y = 2^{x+y} \cdot 3^{4y+x} \cdot 17^y$$

Para que o número acima seja o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, devemos ter $y=1$ e $x=0$. Assim, o número resultante é $2^{0+1} \cdot 3^{4\cdot1+0} \cdot 17^1 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 17 = 2754$, cuja soma dos algarismos é $2+7+5+4=18$.

A quantidade de divisores inteiros positivos de $18 = 2 \cdot 3^2$ é $d(18) = (1+1) \cdot (2+1) = 6$.

20) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução desta desigualdade, que são menores do que $\frac{81}{4}$, é

(A) 172
(B) 170
(C) 169
(D) 162
(E) 157

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(As opções dessa questão foram alteradas, pois não havia opção correta da maneira como a questão foi proposta originalmente.)**

$$\frac{2x^2 - 28x + 98}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (x^2 - 14x + 49)}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (x - 7)^2}{x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow x = 7 \ \vee \ x - 10 > 0 \Leftrightarrow x = 7 \ \vee \ x > 10$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{7\} \cup]10, +\infty[$.

Os valores inteiros do conjunto solução que são menores que $\frac{81}{4} = 20,25$ são $7,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20$, cuja soma é $7 + \frac{(11+20) \cdot 10}{2} = 162$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2012/2013

1) Para $x = 2013$, qual é o valor da expressão $(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}$?
(A) -4
(B) -2
(C) 0
(D) 1
(E) 4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Observe inicialmente que: $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se n é par} \\ -1, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$
Para $x = 2013$, todos os expoentes, exceto $5x$ são pares. Assim, temos:
$(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x+3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x} = 1-(1)+(-1)-(1)-(1)-(1) = -4$.

2) Analise as afirmativas a seguir.
I) $9,\overline{1234} > 9,123\overline{4}$
II) $\dfrac{222221}{222223} > \dfrac{555550}{555555}$
III) $\sqrt{0,444\ldots} = 0,222\ldots$
IV) $2^{\sqrt[3]{27}} = 64^{0,5}$
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(E) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
I) FALSA
$9,\overline{1234} = 9,1234\boxed{1}234\ldots < 9,1234\boxed{4}4\ldots = 9,123\overline{4}$
II) VERDADEIRA
Seja $x = 111111$, então
$$\frac{222221}{222223} - \frac{555550}{555555} = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{5x-5}{5x} = \left(1 - \frac{2}{2x+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} = \frac{1}{x(2x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{222221}{222223} > \frac{555550}{555555}$$
III) FALSA

$\sqrt{0,444\ldots} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0,666\ldots \neq 0,222\ldots$

IV) VERDADEIRA

$2^{\sqrt[3]{27}} = 2^3 = 8$

$64^{0,5} = \left(8^2\right)^{0,5} = 8^{2\cdot 0,5} = 8$

3) Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio e é perpendicular a um dos lados não paralelos, qual é a área desse trapézio?

(A) $75\sqrt{3}$

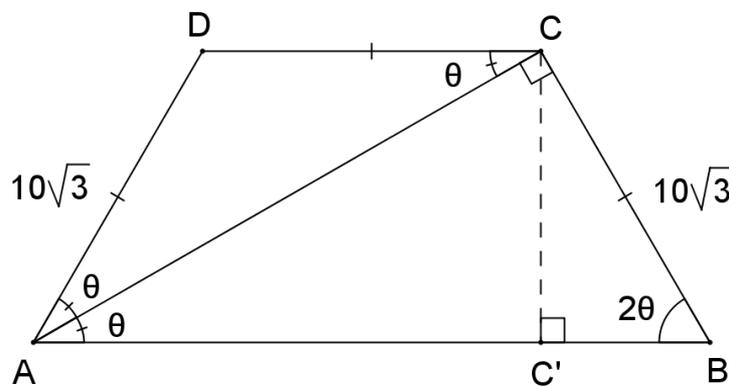
(B) $105\sqrt{3}$

(C) $180\sqrt{3}$

(D) $225\sqrt{3}$

(E) $275\sqrt{3}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Seja ABCD um trapézio isósceles que satisfaz as condições descritas no enunciado e $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 2\theta$.

A diagonal AC é bissetriz de $B\hat{A}D = 2\theta$, então $B\hat{A}C = C\hat{A}D = \theta$.

Como $AB \parallel CD$, então $D\hat{C}A = C\hat{A}B = \theta$.

Portanto, $C\hat{A}D = A\hat{C}D = \theta$, o ΔACD é isósceles e $CD = AD = 10\sqrt{3}$.

Os ângulos adjacentes a um mesmo lado não paralelo de um trapézio são suplementares, então

$A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ \Leftrightarrow 2\theta + \left(90^\circ + \theta\right) = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$.

No triângulo retângulo ABC, temos: $\frac{BC}{AB} = \operatorname{sen} B\hat{A}C \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{AB} = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AB = 20\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo BCC', temos: $\frac{CC'}{BC} = \text{sen}\, C\hat{B}C' \Leftrightarrow \frac{CC'}{10\sqrt{3}} = \text{sen}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow CC' = 15$.

Logo, a área do trapézio $ABCD$ é dada por:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD)\cdot CC'}{2} = \frac{\left(20\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\right)\cdot 15}{2} = 225\sqrt{3} \text{ u.a.}.$$

4) Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número na base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?

(A) 2012
(B) 2013
(C) 2014
(D) 2015
(E) 2016

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$n = 21^{2012} = (3\cdot 7)^{2012} = 3^{2012}\cdot 7^{2012}$

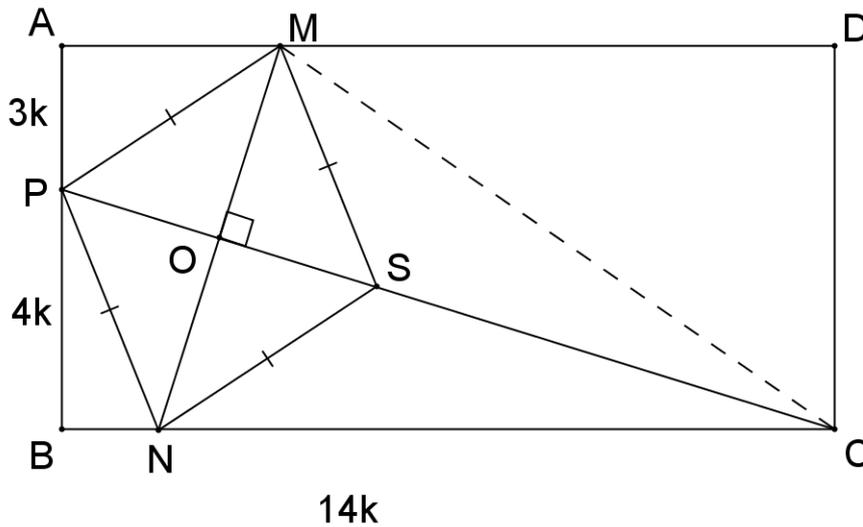
Como 7^{2012} é $(1\underbrace{00\ldots0}_{2012 \text{ zeros}})_7$, então $n = 21^{2012}$ termina com 2012 zeros na base 7.

5) No retângulo $ABCD$, o lado $BC = 2AB$. O ponto P está sobre o lado AB e $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. Traça-se a reta $\overleftrightarrow{PS}$ com S no interior de $ABCD$ e $C \in \overleftrightarrow{PS}$. Marcam-se ainda, $M \in AD$ e $N \in BC$ de modo que $MPNS$ seja um losango. O valor de $\frac{BN}{AM}$ é:

(A) $\frac{3}{7}$
(B) $\frac{3}{11}$
(C) $\frac{5}{7}$
(D) $\frac{5}{11}$
(E) $\frac{7}{11}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

1ª RESOLUÇÃO:

$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{AP}{3}=\frac{PB}{4}=k\Leftrightarrow AP=3k\ \wedge\ PB=4k$

$BC=2\cdot AB=2\cdot(3k+4k)=14k$

Seja $CN=x$, então, como o $\#MPNS$ é um losango, a reta $\overleftrightarrow{PS}$ é a mediatriz do segmento MN, o que implica $CM=CN=x$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao ΔCDM, temos:

$DM^2+DC^2=CM^2\Leftrightarrow DM^2=x^2-(7k)^2=x^2-49k^2\Leftrightarrow DM=\sqrt{x^2-49k^2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos ΔAMP e ΔBNP, temos:

$MP^2=AP^2+AM^2=(3k)^2+\left(14k-\sqrt{x^2-49k^2}\right)^2=156k^2+x^2-28k\sqrt{x^2-49k^2}$

$NP^2=BN^2+BP^2=(14k-x)^2+(4k)^2=(14k-x)^2+16k^2=212k^2-28kx+x^2$

Como o $\#MPNS$ é um losango, então $MP=NP$, então

$156k^2+x^2-28k\sqrt{x^2-49k^2}=212k^2-28kx+x^2\Leftrightarrow -2k+x=\sqrt{x^2-49k^2}$

$\Leftrightarrow 4k^2-4kx+x^2=x^2-49k^2\Leftrightarrow x=\frac{53k}{4}$.

Portanto,

$BN=14k-x=14k-\frac{53k}{4}=\frac{3k}{4}$ e

$AM=14k-\sqrt{x^2-49k^2}=14k-\sqrt{\left(\frac{53k}{4}\right)^2-49k^2}=14k-\frac{45k}{4}=\frac{11k}{4}$

Logo, $\frac{BN}{AM}=\frac{\frac{3k}{4}}{\frac{11k}{4}}=\frac{3}{11}$.

2ª RESOLUÇÃO:

$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{AP}{3}=\frac{PB}{4}=k\Leftrightarrow AP=3k\ \wedge\ PB=4k$

$BC = 2 \cdot AB = 2 \cdot (3k + 4k) = 14k$

Como o $\# MPNS$ é um losango, a reta $\overleftrightarrow{PS}$ é a mediatriz do segmento MN, o que implica $\Delta CMO \equiv \Delta CNO$ e $M\hat{C}O = N\hat{C}O = \theta$.

Como $AD \parallel BC$, então $C\hat{M}D = M\hat{C}N = 2\theta$.

No triângulo retângulo BCP, temos $\text{tg}\,\theta = \frac{BP}{BC} = \frac{4k}{14k} = \frac{2}{7}$.

No triângulo retângulo CDM, temos $\text{tg}\,2\theta = \frac{CD}{MD} = \frac{7k}{MD}$.

Utilizando a relação $\text{tg}\,2\theta = \frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}^2\,\theta} = \frac{2 \cdot \frac{2}{7}}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{28}{45}$, temos $\frac{7k}{MD} = \frac{28}{45} \Leftrightarrow MD = \frac{45k}{4}$.

Logo, $AM = AD - MD = 14k - \frac{45k}{4} = \frac{11k}{4}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AMP, temos:

$$MP^2 = AM^2 + AP^2 = \left(\frac{11k}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \frac{265k^2}{16}.$$

Como o $\# MPNS$ é um losango, então $NP = MP$ e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BNP, temos:

$$BN^2 = NP^2 - BP^2 = \frac{265k^2}{16} - (4k)^2 = \frac{9k^2}{16} \Leftrightarrow BN = \frac{3k}{4}.$$

Logo, $\frac{BN}{AM} = \frac{\frac{3k}{4}}{\frac{11k}{4}} = \frac{3}{11}$.

6) O número $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\ldots) \cdot (k-1) \cdot k$ é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de k para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?

(A) 133
(B) 119
(C) 113
(D) 107
(E) 105

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, é necessário que $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\ldots) \cdot (k-1) \cdot k = k!$ tenha pelo menos 17 fatores 7.

A quantidade de fatores 7 em $N = k!$ é dada por $\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \ldots = 17$ (fórmula de Polignac).

$\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \ldots = 17 \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor \le 17 \Rightarrow \frac{k}{7} < 18 \Leftrightarrow k < 18 \cdot 7 < 7^3$

Como $k < 7^3$, então $\left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{7^4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{7^5} \right\rfloor = \ldots = 0$. Portanto,

$\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^3} \right\rfloor + \ldots = 17 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor = 17$.

Se $49 \le k \le 98 \Rightarrow 8 \le \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor \le 14 + 2 = 16$. Logo, $k > 98$.

Se $98 < k < 147 \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{7^2} \right\rfloor = 2$, então devemos ter $\left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor = 15$. O menor valor para o qual isso ocorre é $k = 15 \cdot 7 = 105$, mas como k é ímpar e não é múltiplo de 7, então o menor valor de k é 107.

NOTA 2: Fórmula de Legendre-Polignac:

A **função maior inteiro (ou função piso)** é a função que associa a cada número real x o maior inteiro maior ou igual a x e é denotada por $\lfloor x \rfloor$.

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \text{ onde } 0 \le \{x\} < 1 \text{ é a parte fracionária de } x$$

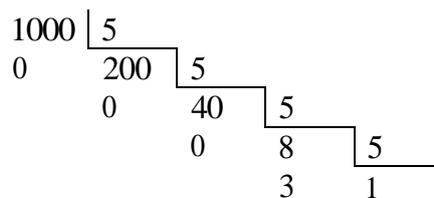
Exemplo: $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2{,}1 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}1 \rfloor = -3$

A **fórmula de Legendre-Polignac** estabelece que se p é primo e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, então o expoente de p em $n!$ é dado por

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

Exemplo: Em quantos zeros termina $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1000$?

Para cada fator 10 de um número, há um zero no final de sua representação decimal. Uma potência de 10 é formada por um fator 2 e um fator 5. Como há mais fatores 2 do que 5, para encontrar a quantidade de fatores 10 em $1000!$, basta contar a quantidade de fatores 5. Isso é feito dividindo-se 1000 sucessivamente por 5 como segue:

```
1000 | 5
0      200 | 5
       0     40 | 5
             0    8 | 5
                  3   1
```

Somando-se os quocientes, encontramos a quantidade de fatores 5, ou seja, $200 + 40 + 8 + 1 = 249$.

Logo, a quantidade de zeros no final da representação de $1000!$ é 249.

Alternativamente, poderíamos utilizar a fórmula de Legendre-Polignac para encontrar a quantidade de fatores 5 em $1000!$. Assim,

$$\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^4} \right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Note que se $k \geq 5$, temos $\left\lfloor \frac{1000}{5^k} \right\rfloor = 0$.

7) Qual é o menor valor positivo de $2160x + 1680y$, sabendo que x e y são números inteiros?

(A) 30
(B) 60
(C) 120
(D) 240
(E) 480

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se $x, y \in \mathbb{Z}$, então $2160x + 1680y = 240 \cdot (9x + 7y)$ é sempre múltiplo do $\text{mdc}(2160,1680) = 240$. Portanto, o menor valor positivo de $2160x + 1680y = 240 \cdot (9x + 7y)$ é $\text{mdc}(2160,1680) = 240$, que ocorre, por exemplo, para $x = -3$ e $y = 4$.

8) Um número inteiro possui exatamente 70 divisores. Qual é o menor valor possível para $|N + 3172|$?

(A) 2012
(B) 3172
(C) 5184
(D) 22748
(E) 25920

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, devemos observar que, para que tenhamos o menor valor possível de $|N + 3172|$, N deve ser negativo.

Seja $N = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a decomposição canônica do número inteiro N. A quantidade de divisores inteiros (positivos ou negativos) de N é dada por

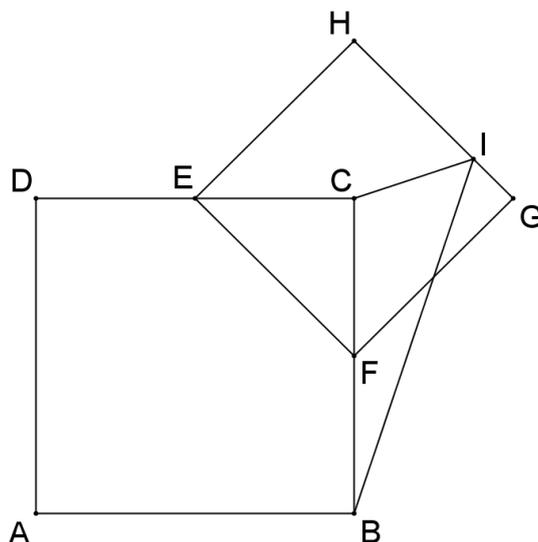
$$d(N) = 2 \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Assim, temos os seguintes casos:

1° caso: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$ e $\alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0 \Rightarrow N = -p_1^4 \cdot p_2^6 \Rightarrow |N| \geq 3^4 \cdot 2^6 = 5184$

2° caso: $\alpha_1 = 34$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0 \Rightarrow N = -p_1^{34} \Rightarrow |N| \geq 2^{34} > 2^{13} = 8192$

Portanto, o menor valor possível para $|N+3172|$ ocorre quando $N = -2^6 \cdot 3^4 = -5184$ e é igual a $|N+3172| = |-5184+3172| = 2012$.

9) Observe a figura a seguir.

A figura acima apresenta um quadrado $ABCD$ de lado 2. Sabe-se que E e F são os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, $EFGH$ também forma um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

(A) $\frac{7}{8}$

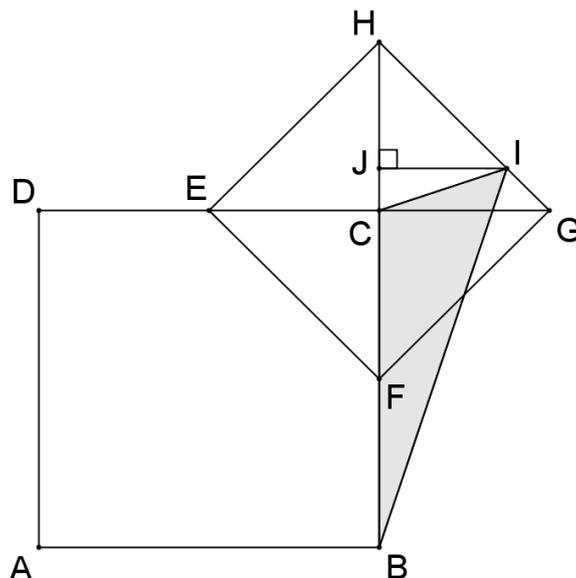
(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{3}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $IJ \perp BH \Rightarrow \Delta HIJ \sim \Delta HGC \Rightarrow \frac{JI}{CG} = \frac{HI}{HG} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow JI = \frac{3}{4}CG = \frac{3}{4}$.

Observando que JI é a altura relativa à base BC do ΔBCI, então a área do ΔBCI é dada por:

$$S_{BCI} = \frac{BC \cdot JI}{2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4} \text{ u.a.}.$$

10) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right) = 1.$$

(A) $-\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) $\frac{11}{3}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Condições de existência:

$x \neq 0$

$x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

$$\frac{x}{x^2-3} \neq -1 \Leftrightarrow x^2+x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{x^2-3+x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\frac{x^2-3}{x}}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-3}{x^2+x-3}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-3}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+x-3}=1 \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

As raízes encontradas satisfazem às condições de existência. Portanto, $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$ e a soma dos valores de x é $\frac{1+\sqrt{13}}{2}+\frac{1-\sqrt{13}}{2}=1$.

Observe que a soma das raízes pode ser obtida aplicando-se as relações entre coeficientes e raízes na equação do 2° grau $x^2-x-3=0$ o que resulta $\frac{-(-1)}{1}=1$. Entretanto, ainda assim é necessário calcular as raízes a fim de garantir que elas satisfazem as condições de existência.

11) Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área de T_1+T_2 seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?

(A) $\varnothing$
(B) unitário
(C) finito
(D) $\{3,5,7,9,11,\ldots\}$
(E) $\{11,17,23,29,\ldots\}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

O triângulo T_1 tem altura h_1 e base correspondente $2h_1$. Logo sua área é $S_{T_1}=\frac{2h_1\cdot h_1}{2}=h_1^2$.

O triângulo T_2 tem altura h_2 e base correspondente $2h_2$. Logo sua área é $S_{T_2}=\frac{2h_2\cdot h_2}{2}=h_2^2$.

Seja a área de T_1+T_2 seja equivalente à área de um quadrado de lado $k\in\mathbb{Z}$, então $S_{T_1}+S_{T_2}=k^2 \Leftrightarrow h_1^2+h_2^2=k^2$.

Como h_1 e h_2 são números ímpares positivos, podemos supor $h_1=2a+1$ e $h_2=2b+1$, com $a,b\in\mathbb{Z}_+$. Assim, temos: $h_1^2+h_2^2=k^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2+(2b+1)^2=k^2 \Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+a+b\right)+2=k^2$.

Entretanto, os restos dos quadrados perfeitos por 4 são 0 ou 1. Portanto, não existem a e b que satisfaçam a igualdade acima e, consequentemente, o conjunto dos valores de h_1 e h_2 que satisfazem as condições do enunciado é vazio.

12) Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?
(A) zero.
(B) dois.
(C) seis.
(D) treze.
(E) vinte e cinco.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sejam q e $r = q^2$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $n \in \mathbb{N}$ por 26, então, pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos:
$n = 26 \cdot q + r \Leftrightarrow n = 26 \cdot q + q^2$ e $0 \leq r < 26 \Leftrightarrow 0 \leq q^2 < 26 \Leftrightarrow q \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
$\Rightarrow (q,n) \in \{(0,0);(1,27);(2,56);(3,87);(4,120);(5,155)\}$
Portanto, há seis naturais n que satisfazem as condições do enunciado.

13) Na fabricação de um produto é utilizado o ingrediente A ou B. Sabe-se que, para cada 100 quilogramas (kg) do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B. Se, reunindo x kg do ingrediente A com y kg do ingrediente B, resulta 44000 gramas do produto, então
(A) $y^x = 2^{60}$
(B) $\sqrt{x \cdot y} = 5\sqrt{10}$
(C) $\sqrt[10]{y^x} = 256$
(D) $\sqrt[4]{x^y} = 20$
(E) $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2\sqrt{5}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Como $44000\text{ g} = 44\text{kg}$, então $x + y = 44$.
Se, para cada 100 kg do ingrediente A devem ser utilizados 10 kg do ingrediente B, então a quantidade de A é sempre dez vezes a quantidade de B, ou seja, $x = 10y$.
$\Rightarrow 10y + y = 44 \Leftrightarrow y = 4 \wedge x = 40$.
Logo, $\sqrt[10]{y^x} = \sqrt[10]{4^{40}} = 4^4 = 2^8 = 256$.

14) Seja $P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013$. O resto $r(x)$ da divisão de $P(x)$ por $d(x) = x^4 + 1$ é tal que $r(-1)$ é:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Considerando a fatoração $x^n + 1 = (x+1)\left(x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + x^2 - x + 1\right)$ para n ímpar, temos:

$$x^{2012} + 1 = \left(x^4\right)^{503} + 1 = \left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \ldots + \left(x^4\right)^2 - \left(x^4\right) + 1\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x^{2012} = 2\left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \ldots + \left(x^4\right)^2 - \left(x^4\right) + 1\right] - 2.$$

Substituindo a expressão acima em $P(x)$, temos:

$$P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013 = 2\left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \ldots + \left(x^4\right)^2 - \left(x^4\right) + 1\right] - 2 + 2012x + 2013 =$$

$$= 2\left(x^4 + 1\right)\left[\left(x^4\right)^{502} - \left(x^4\right)^{501} + \ldots + \left(x^4\right)^2 - \left(x^4\right) + 1\right] + 2012x + 2011$$

Portanto, $r(x) = 2012x + 2011$ e $r(-1) = 2012 \cdot (-1) + 2011 = -1$.

15) Uma divisão de números naturais está representada a seguir.

D	d
r	q

$D = 2012$ é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0 \neq d = 21$ ou $q = 21$. Um resultado possível para $r + d$ ou $r + q$ é:
(A) 92
(B) 122
(C) 152
(D) 182
(E) 202

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos: $D = d \cdot q + r \Leftrightarrow 2012 = d \cdot q + r$, com $0 \leq r < d$.
Se $d = 21$, temos: $2012 = 21 \cdot 95 + 17 \Leftrightarrow q = 95 \wedge r = 17 \Rightarrow r + d = 21 + 17 = 38$ e $r + q = 95 + 17 = 112$
.
Se $q = 21$, temos: $2012 = d \cdot 21 + r$. Como $0 \leq r < d$, então

$21d \le 2012 < 21d + d = 22d \Leftrightarrow 21 \le \frac{2012}{d} < 22 \Leftrightarrow \frac{2012}{22} < d \le \frac{2012}{21} \Leftrightarrow 92 \le d \le 95$.

Assim, com $q = 21$, temos os seguintes casos:

$d = 92 \Rightarrow r = 80 \Rightarrow r + d = 172 \ \wedge \ r + q = 101$

$d = 93 \Rightarrow r = 59 \Rightarrow r + d = 152 \ \wedge \ r + q = 80$

$d = 94 \Rightarrow r = 38 \Rightarrow r + d = 132 \ \wedge \ r + q = 59$

$d = 95 \Rightarrow r = 17 \Rightarrow r + d = 112 \ \wedge \ r + q = 38$

Dentre as opções apenas 152 é um valor possível para $r + d$ ou $r + q$.

16) Seja $a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287$. Considere que a e b são números naturais e que $ab > 3$. Qual é o maior valor natural possível para a expressão $a + b$?

(A) 7
(B) 11
(C) 13
(D) 17
(E) 19

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$a^3b - 3a^2 - 12b^2 + 4ab^3 = 287 \Leftrightarrow ab\left(a^2 + 4b^2\right) - 3\left(a^2 + 4b^2\right) = 7 \cdot 41 \Leftrightarrow (ab - 3)\left(a^2 + 4b^2\right) = 7 \cdot 41$$

Pela desigualdade das médias, temos $\frac{a^2 + 4b^2}{2} \ge \sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 2ab > 6 \Leftrightarrow a^2 + 4b \ \ > 12$.

Como os dois fatores são números naturais positivos, temos os seguintes casos possíveis:

1° caso:

$$\begin{cases} ab - 3 = 1 \\ a^2 + 4b^2 = 287 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + 4b^2 = 287 \end{cases}$$

$$b = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 + 4 \cdot \left(\frac{4}{a}\right)^2 = 287 \Leftrightarrow a^4 - 287a^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{287 \pm \sqrt{82113}}{2} \notin \mathbb{N}$$

2° caso:

$$\begin{cases} ab - 3 = 7 \\ a^2 + 4b^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 10 \\ a^2 + 4b^2 = 41 \end{cases}$$

$$b = \frac{10}{a} \Rightarrow a^2 + 4 \cdot \left(\frac{10}{a}\right)^2 = 41 \Leftrightarrow a^4 - 41a^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 25 \ \vee \ a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 5 \ \vee \ a = \pm 4$$

Como $a, b \in \mathbb{N}$, então temos:

$a = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 7$

$a = 4 \Rightarrow b = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

Portanto, o único valor possível de $a + b$ é 7.

17) Sabendo que $A = \dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$, qual é o valor de $\dfrac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

(A) $\sqrt[5]{3^4}$
(B) $\sqrt[7]{3^6}$
(C) $\sqrt[8]{3^5}$
(D) $\sqrt[10]{3^7}$
(E) $\sqrt[12]{3^5}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}} = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}} = \frac{A^2}{A^{7/6}} = A^{2-\frac{7}{6}} = A^{5/6} = \left(3^{1/2}\right)^{5/6} = 3^{5/12} = \sqrt[12]{3^5}$$

18) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da parte decimal da fração irredutível $\frac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?
(A) 11
(B) 12
(C) 14
(D) 15
(E) 17

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A fração $\frac{5}{7}$ é uma dízima periódica. Vamos efetuar a divisão para identificar o período.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline \ \ 10 & 0,714285\ldots \\ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 5 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array}$$

Quando o resto 5 se repete os números na parte decimal também se repetirão, portanto $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$.

O período da dízima periódica é 714285, que possui 6 algarismos e cuja soma é $7+1+4+2+8+5=27$.

Assim, somando os algarismos da parte decimal até a posição $2012=6\cdot 335+2$, somaremos 335 períodos completos e mais os algarismos 7 e 1.

Portanto, a soma encontrada é $335\cdot 27+7+1=9053$ que dividida por 23 deixa resto 14.

19) Sabendo que n é natural não nulo, e que $x\#y=x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n+1}+\left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)$?

(A) 127

(B) 128

(C) 255

(D) 256

(E) 511

RESPOSTA: C

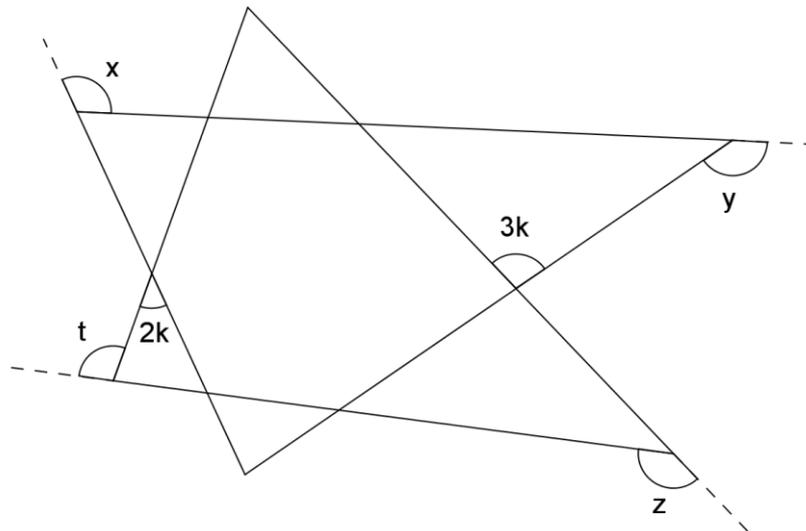
RESOLUÇÃO:

$2\#(2\#(2\#2))=2\#\left(2\#\left(2^2\right)\right)=2\#(2\#4)=2\#\left(2^4\right)=2\#16=2^{16}$

$((2\#2)\#2)\#2=\left(\left(2^2\right)\#2\right)\#2=(4\#2)\#2=\left(4^2\right)\#2=16\#2=16^2=\left(2^4\right)^2=2^8$

$n\in\mathbb{N}\Rightarrow n^4+n+1=n\left(n^3+1\right)+1$ é ímpar, pois n e $\left(n^3+1\right)$ têm paridades contrárias, ou seja, pelo menos um deles é par $\Rightarrow(-1)^{n^4+n+1}=-1$.

$$\Rightarrow(-1)^{n^4+n+1}+\left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)=-1+\left(\frac{2^{16}}{2^8}\right)=-1+2^8=255$$

20) Observe a figura a seguir.

Na figura acima, sabe-se que $k > 36^\circ$. Qual é o menor valor natural da soma $x + y + z + t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

(A) 479°

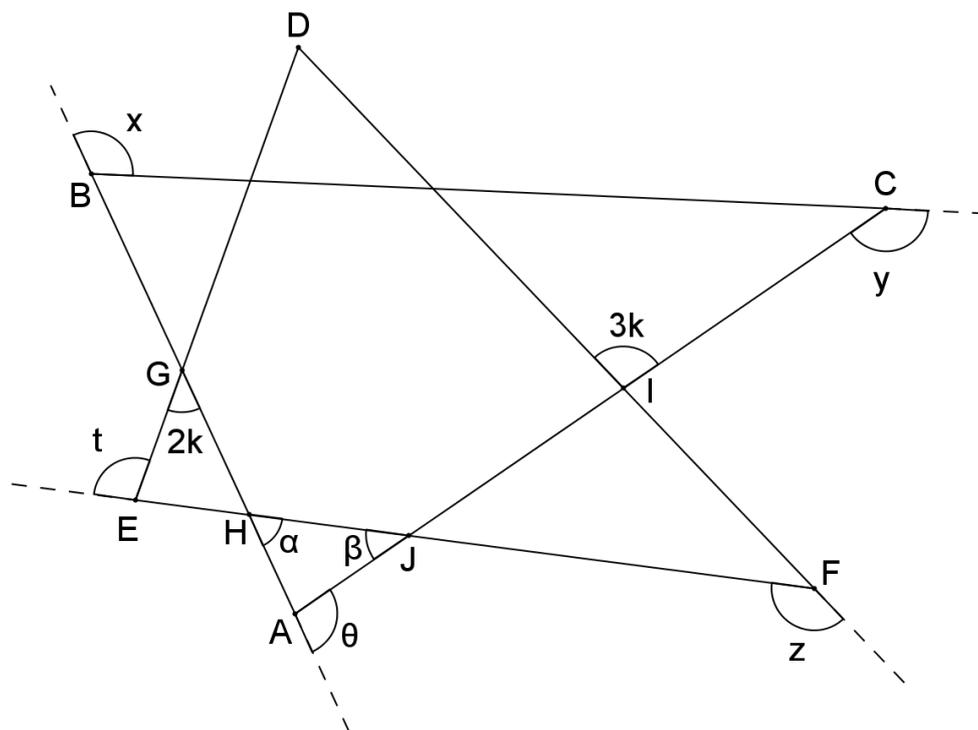
(B) 539°

(C) 599°

(D) 659°

(E) 719°

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Vamos utilizar que, em um triângulo qualquer, o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele e que a soma dos ângulos externos é igual a 360°.

$\Delta EGH: t = 2k + \alpha \Leftrightarrow \alpha = t - 2k$

$\Delta FIJ: z = 3k + \beta \Leftrightarrow \beta = z - 3k$

$\Delta AJH: \theta = \alpha + \beta$

$\Delta ABC: x + y + \theta = 360^\circ$

$x + y + \theta = 360^\circ \Rightarrow x + y + (\alpha + \beta) = 360^\circ \Rightarrow x + y + (t - 2k) + (z - 3k) = 360^\circ$

$\Leftrightarrow x + y + z + t = 360^\circ + 5k > 360^\circ + 5 \cdot 36^\circ = 540^\circ$

A soma $x + y + z + t > 540^\circ$ deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12, então $(x + y + z + t) + 1$ é múltiplo de 5 e de 12, e, portanto, múltiplo de 60.

O menor múltiplo de 60 maior do que 541 é 600, então

$(x + y + z + t) + 1 = 600 \Leftrightarrow x + y + z + t = 599^\circ$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2011/2012

1) É correto afirmar que o número $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ é múltiplo de
(A) 13
(B) 11
(C) 7
(D) 5
(E) 3

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Como $5\equiv -1 \pmod 3$ e $11\equiv -1 \pmod 3$, vamos calcular inicialmente o resto na divisão por 3:

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv(-1)^{2011}+2\cdot(-1)^{2011}\equiv -1-2\equiv 0 \pmod 3$$

Logo, $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ é múltiplo de 3.
Observe ainda que:

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 5^{2011}+2\cdot(-2)^{2011}\equiv 5^{2011}-2^{2011}\equiv 5\cdot\left(5^2\right)^{1005}-2\cdot\left(2^6\right)^{335}\equiv$$

$$\equiv 5\cdot(-1)^{1005}-2\cdot(-1)^{335}\equiv -5+2\equiv -3\equiv 10 \pmod{13}$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 5^{2011}+2\cdot 0^{2011}\equiv 5\cdot\left(5^5\right)^{402}\equiv 5\cdot 1^{402}\equiv 5 \pmod{11}$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv(-2)^{2011}+2\cdot 4^{2011}\equiv -2^{2011}+2^{4023}\equiv -2\cdot\left(2^3\right)^{670}+\left(2^3\right)^{1341}\equiv$$

$$\equiv -2\cdot 1^{670}+1^{1341}\equiv -2+1\equiv -1\equiv 6 \pmod 7$$

$$5^{2011}+2\cdot 11^{2011}\equiv 0^{2011}+2\cdot 1^{2011}\equiv 2 \pmod 5$$

Logo, $5^{2011}+2\cdot 11^{2011}$ não é múltiplo de 13, 11, 7 ou 5.

2) A solução real da equação $\frac{7}{x-1}-\frac{8}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
(A) 12
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 19

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Condição de existência: $x\neq\pm 1$

$$\frac{7}{x-1}-\frac{8}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}\Leftrightarrow 7(x+1)-8(x-1)=9\Leftrightarrow x=6$$

Logo, a solução real da equação é 6 que é um divisor de 12.

3) A soma das raízes de uma equação do 2° grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é $0,25$. Determine o valor de $\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}$, sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2° grau e $a>b$, e assinale a opção correta.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

(C) -1

(D) $\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

(E) $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$a+b=\sqrt{2}$

$a\cdot b=0,25=\frac{1}{4}$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=(a+b)^2-4ab=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}=1$

$a>b\Rightarrow a-b=1$

$$\frac{a^3-b^3-2ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a^3-ab^2-b^3-ab^2}{a^2-b^2}=\frac{a\left(a^2-b^2\right)-b^2(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2-ab-b^2}{a-b}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)-ab}{a-b}=a+b-\frac{ab}{a-b}=\sqrt{2}-\frac{\frac{1}{4}}{1}=\sqrt{2}-\frac{1}{4}$$

4) Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de q^2+6q é sempre igual a

(A) $\frac{p^2r^2+9}{4}$

(B) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$

(C) p^2r^2-9

(D) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$

(E) p^2r^2-12p

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$pr=\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)(ab+ac+bc)=1+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1+\frac{b}{c}+1+\frac{b}{a}=3+q$$

$$\Rightarrow p^2r^2=(q+3)^2\Leftrightarrow p^2r^2=q^2+6q+9\Leftrightarrow q^2+6q=p^2r^2-9$$

5) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5$ é

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5\Leftrightarrow\sqrt{33x^3+97}=3x^3-5$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{33x^3+97}\right)^2=\left(3x^3-5\right)^2\ \wedge\ 3x^3-5\geq 0$$

A condição $3x^3-5\geq 0\Leftrightarrow x^3\geq\frac{5}{3}$ será verificada no final.

$$\Leftrightarrow 33x^3+97=9x^6-30x^3+25\Leftrightarrow x^6-7x^3-8=0\Leftrightarrow x^3=-1\ \vee\ x^3=8$$

Como $x^3\geq\frac{5}{3}$, então $x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Logo, há apenas uma solução real.

6) Num paralelogramo $ABCD$ de altura $CP=3$, a razão $\frac{AB}{BC}=2$. Seja $'M'$ o ponto médio de AB e $'P'$ o pé da altura de $ABCD$ baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo BPC é igual a

(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

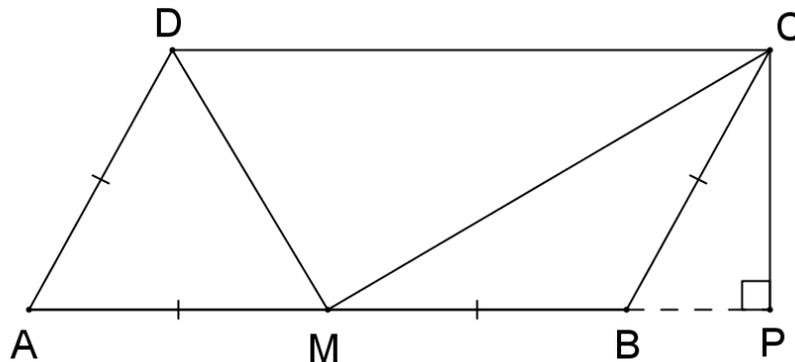
(B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\frac{AB}{BC}=2 \Leftrightarrow BC=\frac{AB}{2}=AM=MB$

Como os triângulos MPC e ADM possuem alturas de mesma medida, a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

$\frac{S(MPC)}{S(ADM)}=\frac{MP}{AM}=\frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{MB+BP}{AM}=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 1+\frac{BP}{BC}=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{BP}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BP}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{2}=k$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta BPC: BP^2+CP^2=BC^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}k\right)^2+3^2=(2k)^2 \Leftrightarrow k=3$

$\Rightarrow S(BPC)=\frac{BP \cdot PC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ unidades de área

7) O valor de $\sqrt{9^{0,5}\times 0,333\ldots+\sqrt[7]{4\times\sqrt{0,0625}}}-\frac{(3,444\ldots+4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}$ é

(A) 0

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}-2$

(D) $\sqrt{2}-2$

(E) 1

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{9^{0,5}\times 0,333\ldots+\sqrt[7]{4\times\sqrt{0,0625}}}-\frac{(3,444\ldots+4,555\ldots)}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{3\times\frac{1}{3}+\sqrt[7]{4\times\sqrt{\frac{625}{10000}}}}-\frac{7,999\ldots}{\sqrt[3]{2^6}}=$$

$$=\sqrt{1+\sqrt[7]{4\times\frac{25}{100}}}-\frac{8}{2^2}=\sqrt{1+\sqrt[7]{4\times\frac{1}{4}}}-2=\sqrt{1+\sqrt[7]{1}}-2=\sqrt{2}-2$$

8) Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

I – Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.

II – Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.

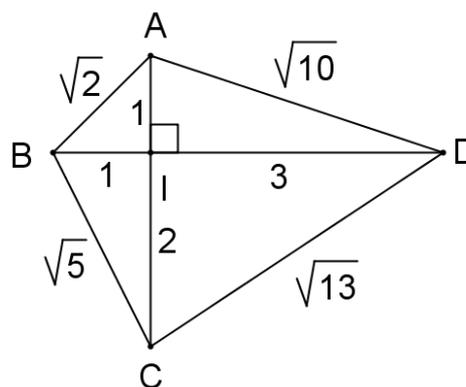
III – Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

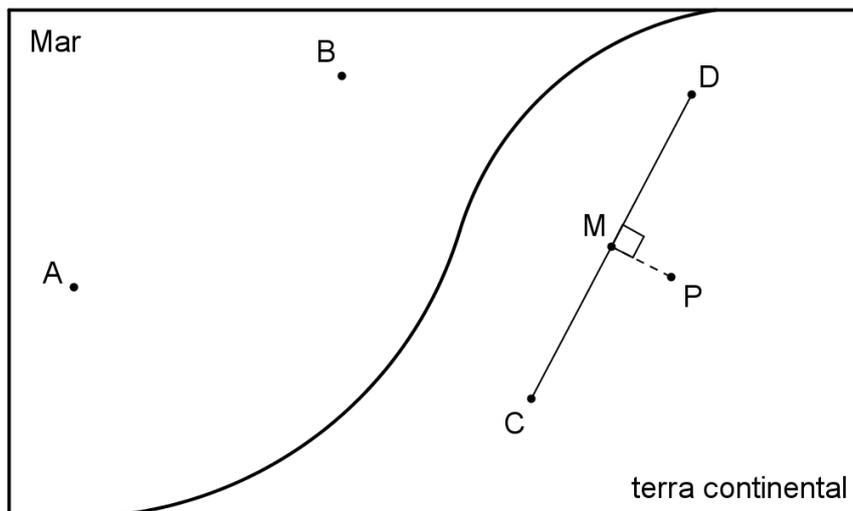
Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são falsas.

RESPOSTA: E

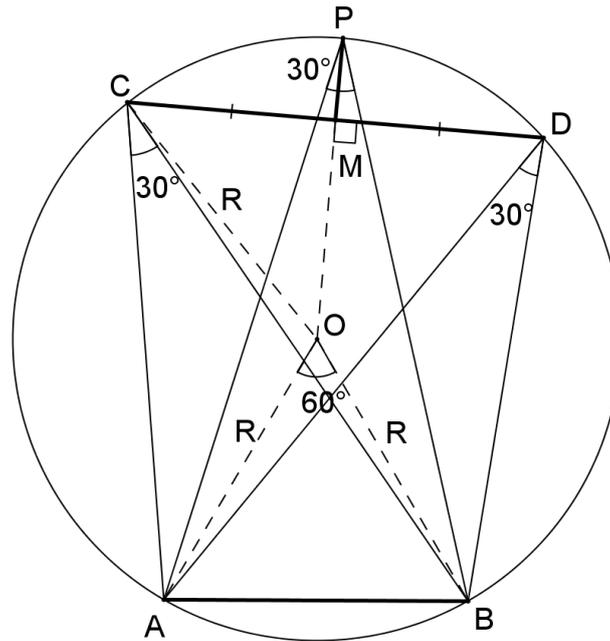
RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

I – FALSA
Se as diagonais têm medidas diferentes ou não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um quadrado.
II – FALSA
Se as diagonais não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um losango.
III – FALSA
Basta observar o contra exemplo a seguir.

Esse contra exemplo também mostra que as afirmativas I e II são FALSAS.

9) Observe a figura a seguir

A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos $'A'$ e $'B'$ e os pontos $'C'$, $'D'$, $'M'$ e $'P'$ fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, $'M'$ é o ponto médio de $CD = 100\text{ m}$ e que $PM = 10\text{ m}$ é perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

(A) 150 m
(B) 130 m
(C) 120 m
(D) 80 m
(E) 60 m

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Como $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, então C, D e P pertencem ao arco capaz de 30° sobre $\overline{AB}$.
Como M é ponto médio de $\overline{CD}$ e $\overline{PM} \perp \overline{CD}$, então $\overline{PM}$ é uma flecha da circunferência e seu prolongamento passa pelo centro O.
Seja R o raio da circunferência que contém o arco capaz, então, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCM, temos:
$(R-10)^2 + 50^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 20R + 100 + 2500 = R^2 \Leftrightarrow R = 130$.
Como o ΔOAB é equilátero, então $\overline{AB} = R = 130 \text{ m}$.

10) Numa pesquisa sobre a leitura dos jornais A e B, constatou-se que 70% dos entrevistados leem o jornal A e 65% leem o jornal B. Qual o percentual máximo dos que leem os jornais A e B?
(A) 35%
(B) 50%
(C) 65%
(D) 80%
(E) 95%

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Seja $n(X)$ o percentual de leitores associados ao conjunto X.
$n(A) = 70\%$
$n(B) = 65\%$
O percentual máximo dos que leem os jornais A e B é o valor máximo de $n(A \cap B)$.
Pelo princípio da inclusão-exclusão: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Leftrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 70\% + 65\% - n(A \cup B) = 135\% - n(A \cup B)$
Como $n(A \cup B) \geq n(A) = 70\%$, então $n(A \cap B)_{MAX} = 135\% - 70\% = 65\%$.
Note que esse valor máximo ocorre quando $B \subset A$, o que implica $n(A \cap B) = n(B)$.

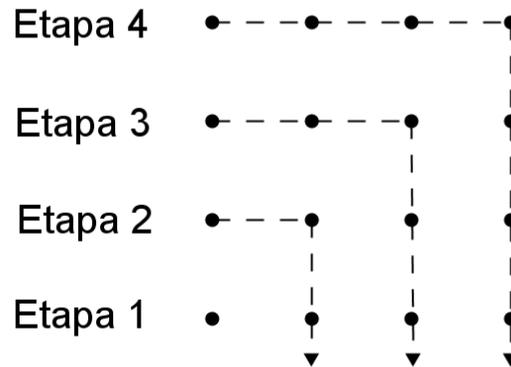
11) Analise as afirmações abaixo referentes a números reais simbolizados por 'a', 'b' ou 'c'.
I – A condição $a \cdot b \cdot c > 0$ garante que 'a', 'b' e 'c' não são, simultaneamente, iguais a zero, bem como a condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
II – Quando o valor absoluto de 'a' é menor do que $b > 0$, é verdade que $-b < a < b$.
III – Admitindo que $b > c$, é verdadeiro afirmar que $b^2 > c^2$.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA
$a \cdot b \cdot c > 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \wedge b^2 > 0 \wedge c^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
Note que a condição inicial garante que nenhum dos três números é nulo, que é uma condição mais forte do que os três números não serem simultaneamente nulos.
II – VERDADEIRA
Pela definição de valor absoluto (módulo), temos se $b > 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.
Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Se $a \geq 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow a < b$. Logo, $0 \leq a < b$.
Se $a < 0$, então $|a| < b \Leftrightarrow -a < b \Leftrightarrow -b < a$. Logo, $-b < a < 0$.
Fazendo a união dos dois intervalos temos o conjunto solução da inequação $|a| < b$ que é $-b < a < b$.
III - FALSA
Basta considerar o contra exemplo seguinte: $-1 > -2$ e $(-1)^2 = 1 < 2 = (-2)^2$.
A condição $b > c > 0 \Rightarrow b^2 > c^2$ seria verdadeira.

12) Observe a figura abaixo.

A figura apresentada foi construída por etapas. A cada etapa, acrescentam-se pontos na horizontal e na vertical, com uma unidade de distância, exceto na etapa 1, iniciada com 1 ponto.
Continuando a compor a figura com estas etapas e buscando um padrão, é correto concluir que
(A) cada etapa possui quantidade ímpar de pontos e a soma desses 'n' primeiros ímpares é n^2.
(B) a soma de todos os números naturais começando do 1 até 'n' é sempre um quadrado perfeito.
(C) a soma dos pontos das 'n' primeiras etapas é $2n^2-1$.
(D) cada etapa 'n' tem $3n-2$ pontos.
(E) cada etapa 'n' tem $2n+1$ pontos.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Na n-ésima etapa são acrescentados n pontos na horizontal e n pontos na vertical, mas o ponto da "quina" foi contado na horizontal e na vertical, logo o total de pontos acrescentados na n-ésima etapa é $n+n-1=2n-1$.
Assim, a quantidade de pontos acrescentados a cada etapa é ímpar.
A soma das quantidades de pontos das n primeiras etapas é:
$$S'_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$\Rightarrow 2\cdot S'_n = (1+(2n-1))+(3+(2n-3))+\cdots+((2n-3)+3)+((2n-1)+1) = n\cdot 2n \Leftrightarrow S'_n = n^2$$
A soma de todos os naturais de 1 até n é
$$S_n = 1+2+3+\cdots+n \Leftrightarrow 2S_n = (1+n)+(2+(n-1))+\cdots+((n-1)+2)+(n+1) = n\cdot(n+1) \Leftrightarrow S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Note que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ não é um quadrado perfeito.
Logo, a única alternativa correta é a letra (A).

13) O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a
(A) $5-\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
(C) $3-\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$

(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Para resolver esse problema deve-se observar o produto notável $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Considerando a expressão
$(a-b\sqrt{3})^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{3} + 3a(b\sqrt{3})^2 - (b\sqrt{3})^3 = (a^3 + 9ab^2) - 3(a^2b + b^3)\sqrt{3}$.
Vamos então tentar identificar números positivos a e b tais que
$26 - 15\sqrt{3} = (a^3 + 9ab^2) - 3(a^2b + b^3)\sqrt{3}$.

$26 = 8 + 18 = 2^3 + 9 \cdot 2 \cdot 1^2 \ \wedge\ 15 = 3(2^2 \cdot 1 + 1^3) \Rightarrow a = 2 \ \wedge\ b = 1 \Rightarrow 26 - 15\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^3$.
Note que para identificar o valor de a testamos os cubos perfeitos menores que 26.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} = 2-\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow 2-\sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

14) A divisão do inteiro positivo $'N'$ por 5 tem quociente $'q_1'$ e resto 1. A divisão de $'4q_1'$ por 5 tem quociente $'q_2'$ e resto 1. A divisão de $'4q_2'$ por 5 tem quociente $'q_3'$ e resto 1. Finalmente, dividindo $'4q_3'$ por 5, o quociente é $'q_4'$ e o reto é 1. Sabendo que $'N'$ pertence ao intervalo aberto $(621,1871)$, a soma dos algarismos de $'N'$ é
(A) 18
(B) 16
(C) 15
(D) 13
(E) 12

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Escrevendo cada uma das divisões com base no algoritmo de Euclides e somando 4 unidades a cada uma das equações, temos:

$$N = 5\cdot q_1 + 1 \Rightarrow N + 4 = 5(q_1+1)$$

$$4q_1 = 5\cdot q_2 + 1 \Rightarrow 4(q_1+1) = 5(q_2+1)$$

$$4q_2 = 5\cdot q_3 + 1 \Rightarrow 4(q_2+1) = 5(q_3+1)$$

$$4q_3 = 5\cdot q_4 + 1 \Rightarrow 4(q_3+1) = 5(q_4+1)$$

Multiplicando as quatro equações obtidas, temos: $4^3(N+4) = 5^4(q_4+1)$.

$\text{mdc}(4,5) = 1 \Rightarrow 5^4 \mid (N+4) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $N + 4 = 5^4 \cdot k \Leftrightarrow N = 625k - 4$

$N \in (621,1871) \Rightarrow 621 < N < 1871 \Rightarrow 621 < 625k - 4 < 1871 \Rightarrow k = 2$

$\Rightarrow N = 625 \cdot 2 - 4 = 1246$
Logo, a soma dos algarismos de N é $1+2+4+6=13$.

15) Assinale a opção que apresenta o único número que NÃO é inteiro.
(A) $\sqrt[6]{1771561}$
(B) $\sqrt[4]{28561}$
(C) $\sqrt[6]{4826807}$
(D) $\sqrt[4]{331776}$
(E) $\sqrt[6]{148035889}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Vamos analisar o último algarismo dos quadrados perfeitos e dos cubos perfeitos.
As congruências abaixo são calculadas módulo 10.
$0^2 \equiv 0$; $1^2 \equiv 1$; $2^2 \equiv 4$; $3^2 \equiv 9$; $4^2 \equiv 6$; $5^2 \equiv 5$; $6^2 \equiv 6$; $7^2 \equiv 9$; $8^2 \equiv 4$; $9^2 \equiv 1$
$0^3 \equiv 0$; $1^3 \equiv 1$; $2^3 \equiv 8$; $3^3 \equiv 7$; $4^3 \equiv 4$; $5^3 \equiv 5$; $6^3 \equiv 6$; $7^3 \equiv 3$; $8^3 \equiv 2$; $9^3 \equiv 9$
Assim, o número 4826807 não é quadrado e não é cubo perfeito, logo $\sqrt[6]{4826807} \notin \mathbb{Z}$.
Note que $\sqrt[6]{1771561} = \sqrt[6]{11^6} = 11$, $\sqrt[4]{28561} = \sqrt[4]{13^4} = 13$, $\sqrt[4]{331776} = \sqrt[4]{24^4} = 24$ e $\sqrt[6]{148035889} = \sqrt[6]{23^6} = 23$ são todos inteiros.

16) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
(A) 2
(B) $\sqrt{2}-1$
(C) $2-\sqrt{2}$
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$
$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)^2 \leq 0$.
Logo, o valor máximo de $\sqrt[3]{-(x-1)^6} = -(x-1)^2$ é 0 que ocorre quando $x=1$.
Essa conclusão poderia ser obtida também observando que o valor máximo da expressão é a ordenada do vértice da função quadrática $y = -(x-1)^2$ cujo vértice é $V = (1,0)$.

17) Sejam $A=\left[7^{2011},11^{2011}\right]$ e $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=(1-t)\cdot 7^{2011}+t\cdot 11^{2011}\text{ com } t\in[0,1]\right\}$, o conjunto $A-B$ é

(A) $A\cap B$

(B) $B-\left\{11^{2011}\right\}$

(C) $A-\left\{7^{2011}\right\}$

(D) A

(E) $\varnothing$

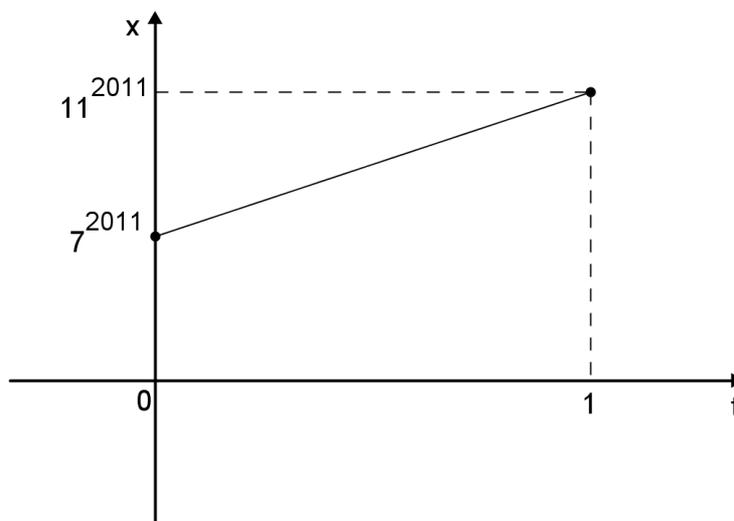
RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

A expressão $x=(1-t)\cdot 7^{2011}+t\cdot 11^{2011}$ é uma função do primeiro grau em t que associa cada valor de t a um valor de x.

$$x=(1-t)\cdot 7^{2011}+t\cdot 11^{2011}=\left(11^{2011}-7^{2011}\right)t+7^{2011}$$

Como essa função do primeiro grau possui domínio $[0,1]$, sua imagem é $\left[7^{2011},11^{2011}\right]$, logo $B=\left[7^{2011},11^{2011}\right]$ e $A-B=\varnothing$.

Abaixo está apresentado o gráfico que representa essa função. Observe que esse gráfico é um segmento de reta que liga o ponto $\left(0,7^{2011}\right)$ ao ponto $\left(1,11^{2011}\right)$.

Note ainda que a expressão utilizada no enunciado é uma expressão conhecida para representação dos elementos de um intervalo real qualquer a partir do intervalo $[0,1]$: $[a,b]=\left\{x\,|\,x=a\cdot(1-t)+b\cdot t,\ t\in[0,1]\right\}$.

18) Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de 'N' e 'n' lados $(N\neq n)$, e com 'D' e 'd' diagonais, respectivamente, de modo que $N-n=D-d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é

(A) 0

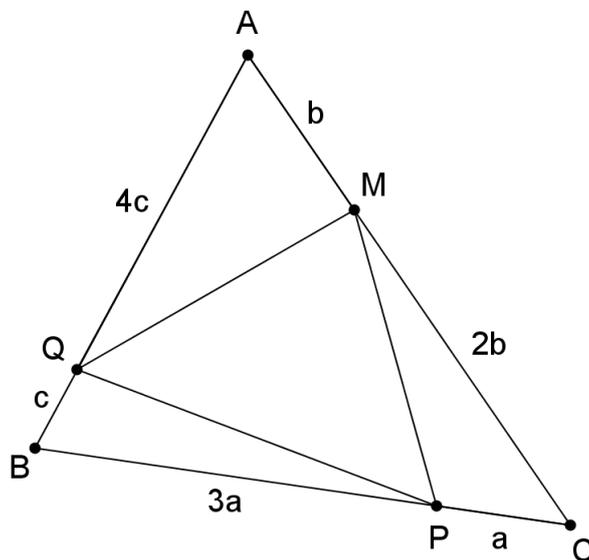
(B) 1

(C) 2

(D) 3
(E) indeterminada.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$N-n=D-d \Leftrightarrow N-n=\frac{N(N-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow 2(N-n)=N^2-3N-n^2+3n$
$\Leftrightarrow N^2-n^2=5(N-n) \Leftrightarrow (N+n)(N-n)=5(N-n)$
$N \neq n \Rightarrow N-n \neq 0 \Rightarrow N+n=5$
Mas N e n são gêneros de polígonos, então $N \geq 3$ e $n \geq 3$, o que implica $N+n \geq 6$.
Logo, não há nenhuma solução correta (A).

19) Considere a figura abaixo.

A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é

(A) $\frac{7}{12}$
(B) $\frac{5}{12}$
(C) $\frac{7}{15}$
(D) $\frac{8}{15}$
(E) $\frac{7}{8}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{S(AQM)}{S(ABC)} = \frac{AQ \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{4c \cdot b}{5c \cdot 3b} = \frac{4}{15}$$

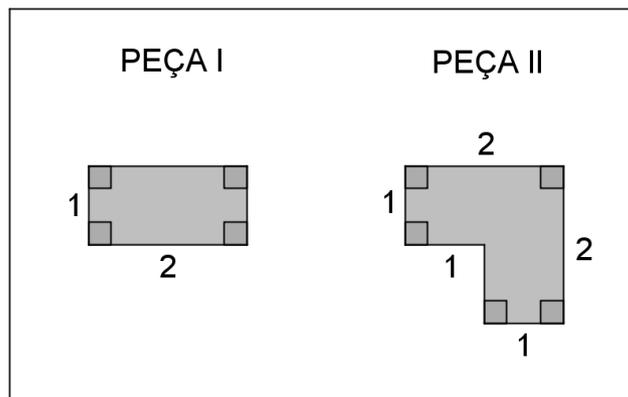
$$\frac{S(BPQ)}{S(ABC)} = \frac{BP \cdot BQ}{BC \cdot BA} = \frac{3a \cdot c}{4a \cdot 5c} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{S(CMP)}{S(ABC)} = \frac{CM \cdot CP}{CA \cdot CB} = \frac{2b \cdot a}{3b \cdot 4a} = \frac{1}{6}$$

$$S(MPQ) + S(AQM) + S(BPQ) + S(CMP) = S(ABC)$$

$$\Leftrightarrow S(MPQ) + \frac{4}{15}S(ABC) + \frac{3}{20}S(ABC) + \frac{1}{6}S(ABC) = S(ABC)$$

$$\Leftrightarrow S(MPQ) = \left(1 - \frac{4}{15} - \frac{3}{20} - \frac{1}{6}\right)S(ABC) = \frac{5}{12}S(ABC) \Leftrightarrow \frac{S(MPQ)}{S(ABC)} = \frac{5}{12}$$

20) Observe a ilustração a seguir.

Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadrado de lado 5, utilizando as peças acima?

(A) 12
(B) 11
(C) 10
(D) 9
(E) 8

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

A peça I possui área $S_1 = 1 \cdot 2 = 2$ e a peça II possui área $S_2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

Um quadrado de lado 5 possui área $5^2 = 25$.

Supondo que sejam utilizadas x peças do tipo I e y peças do tipo II para revestir o quadrado, então $2 \cdot x + 3 \cdot y = 25$.

Para encontrar a quantidade mínima de peças, devemos obter o valor mínimo de $x + y$.

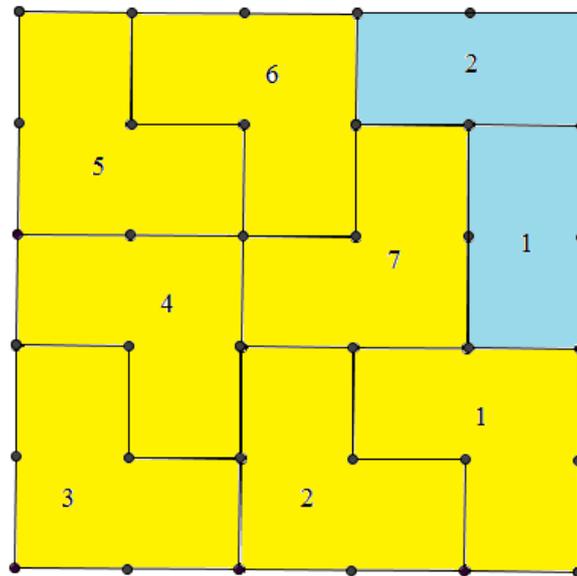
Como $\text{mdc}(2,3)=1$, a equação acima pode ser resolvida como segue: $2x+3y=25 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+3t \\ y=7-2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

Mas, como x e y são as quantidades de peças, ambos devem ser não negativos.

$$\begin{cases} x=2+3t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{3} \\ y=7-2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{7}{2}$$

$t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{0,1,2,3\}$

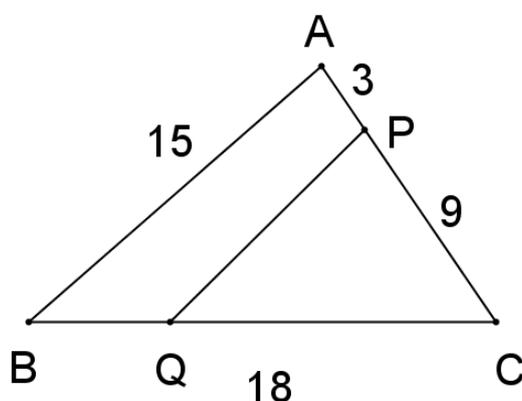
Como $x+y=(2+3t)+(7-2t)=9+t$ e $t \in \{0,1,2,3\}$, então o valor mínimo procurado é $(x+y)_{MIN}=9+0=9$, que ocorre quando $t=0$. Neste caso, $x=2$ e $y=7$.

A figura a seguir ilustra o caso encontrado acima

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2010/2011

1) Seja ABC um triângulo com lados $AB = 15$, $AC = 12$ e $BC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que $PC = 3AP$. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero $APQB$ seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

(A) 3,5
(B) 5
(C) 6
(D) 8
(E) 8,5

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$PC = 3 \cdot AP \Leftrightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{AP + PC}{AP} = \frac{3+1}{1} \Leftrightarrow \frac{AC}{AP} = 4 \Leftrightarrow AP = \frac{AC}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S(APQB) = S(PQC) \Leftrightarrow S(ABC) = 2 \cdot S(PQC)$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(PQC)} = \frac{CB \cdot CA}{CQ \cdot CP} = \frac{18 \cdot 12}{CQ \cdot 9} = 2 \Leftrightarrow CQ = 12 \Rightarrow BQ = 6$$

2) Sejam $p(x) = 2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ e $q(x) = x^2 + x + 1$. Tomando $r(x)$ como sendo o resto na divisão de $p(x)$ por $q(x)$, o valor de $r(2)$ será

(A) –8
(B) –6
(C) –4
(D) –3
(E) –2

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$P(x) = 2\left(x^{2010} - 1\right) - 5x^2 - 13x + 9$

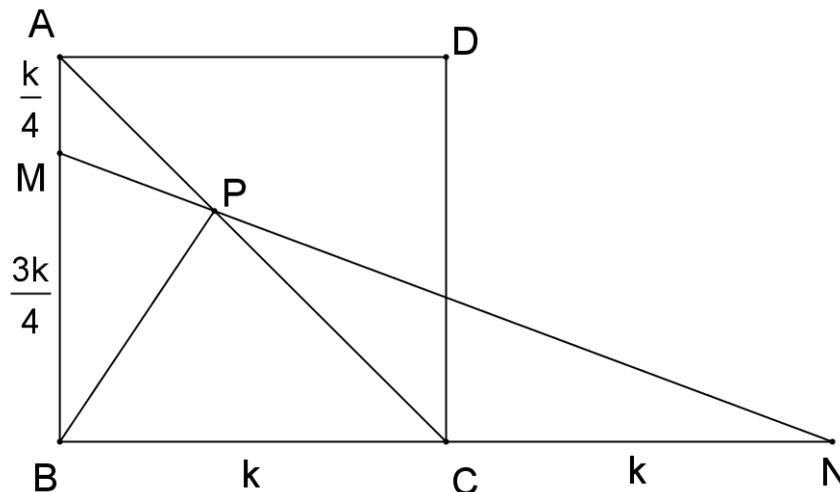
$x^{2010} - 1 = \left(x^3\right)^{670} - 1$ é divisível por $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$ e, portanto, $x^{2010} - 1$ é divisível por $x^2 + x + 1$.

Assim, o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 + x + 1$ é igual ao resto da divisão de $-5x^2 - 13x + 9$ por $x^2 + x + 1$ que é $r(x) = -8x + 14$ e $r(2) = -2$.

3) Tem-se o quadrado de vértices $ABCD$ com lados medindo $'k'\,cm$. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área $ABCD$, a área do triângulo PBC equivale a:

(A) 18%
(B) 24%
(C) 27%
(D) 30%
(E) 36%

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ABC com a secante MPN:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{BN}{CN} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{k}{4}}{\frac{3k}{4}} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{2k}{k} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CP}{AP + CP} = \frac{3}{2+3} \Leftrightarrow \frac{CP}{CA} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S(PBC)}{S(ABC)} = \frac{CP}{CA} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow S(PBC) = \frac{3}{5} \cdot S(ABC) = \frac{3}{5} \cdot \frac{S(ABCD)}{2} = \frac{3}{10} \cdot S(ABCD) = 30\% \cdot S(ABCD)$$

4) No conjunto dos inteiros positivos sabe-se que $'a'$ é primo com $'b'$ quando $mdc(a, b) = 1$.

Em relação a este conjunto, analise as afirmativas a seguir.
I – A fatoração em números primos é única, exceto pela ordem dos fatores.
II – Existem 8 números primos com 24 e menores que 24.
III – Se $(a+b)^2=(a+c)^2$ então $b=c$.
IV – Se $a<b$, então $a\cdot c<b\cdot c$.
Quantas das afirmativas acima são verdadeiras?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado da afirmativa I foi adequado para tornar a questão mais precisa.)**
I – VERDADEIRA
Essa afirmativa traz o enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética, cuja demonstração pode ser encontrada na maioria dos bons textos sobre Teoria dos Números.
II – VERDADEIRA

$$\phi(24)=24\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=24\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=8$$

III – VERDADEIRA

$$a,b,c\in\mathbb{Z}_+^*\Rightarrow(a+b)^2=(a+c)^2\Leftrightarrow a+b=a+c\Leftrightarrow b=c$$

IV – VERDADEIRA

$$a,b,c\in\mathbb{Z}_+^*\Rightarrow a<b\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$$

5) Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar corretamente o número de soluções inteiras e positivas da equação $5x^2+11y^2=876543$. Qual foi o número de soluções que este aluno obteve?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$5x^2+11y^2=876543\Leftrightarrow 5\left(x^2+2y^2\right)+y^2=876543$$

Como 876543 não é múltiplo de 5, então y também não é múltiplo de 5.
Os possíveis restos dos quadrados perfeitos por 5 são 0 ou ±1, mas como y não é múltiplo de 5, então o resto de y^2 na divisão por 5 é ±1, ou seja, $y^2\equiv\pm1\pmod 5$.

$$\left.\begin{array}{l} 5\left(x^2+2y^2\right)\equiv 0\pmod 5 \\ y^2\equiv \pm 1\pmod 5 \end{array}\right\}\Rightarrow 5\left(x^2+2y^2\right)+y^2\equiv \pm 1\pmod 5$$

Como $876543\equiv 3\pmod 5$, a equação $5x^2+11y^2=876543$ não possui soluções inteiras positivas.

Note que para mostrar que os possíveis restos dos quadrados perfeitos por 5 são 0 ou ± 1, basta observar que todos os números inteiros podem ser representados por uma das formas: $5k$, $5k\pm 1$ ou $5k\pm 2$, onde $k\in\mathbb{Z}$. Além disso, $(5k\pm 1)^2=25k^2\pm 10k+1=5\left(5k^2\pm 2k\right)+1$ e $(5k\pm 2)^2=25k^2\pm 20k+4=5\left(5k^2\pm 4k+1\right)-1$.

6) $ABCD$ é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB e com uma das extremidades em A e tangente externamente à K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será

(A) $\frac{5L}{6}$

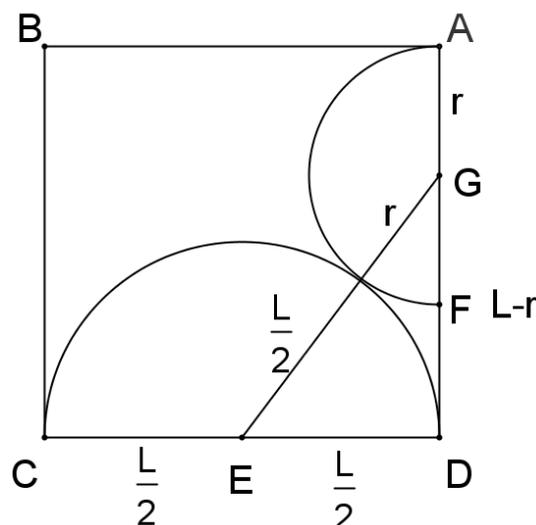
(B) $\frac{4L}{5}$

(C) $\frac{2L}{3}$

(D) $\frac{3L}{5}$

(E) $\frac{L}{3}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao ΔDEG, temos:

$$\left(r+\frac{L}{2}\right)^2=(L-r)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2+rL+\frac{L^2}{4}=L^2-2rL+r^2+\frac{L^2}{4} \Leftrightarrow 3rL=L^2 \Leftrightarrow r=\frac{L}{3}$$

Note que, no caso de circunferências tangentes exteriormente, a distância entre seus centros é igual à soma de seus raios.

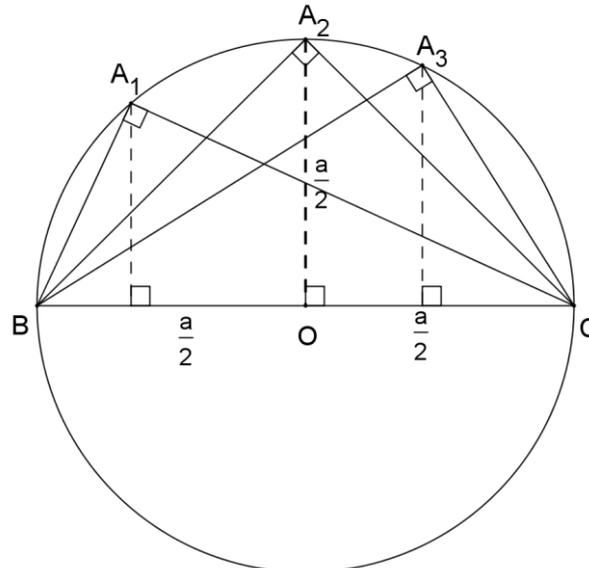
7) Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo $'h'$ a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos nesse conjunto tem área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?

(A) Infinitos.
(B) Mais de dezesseis e menos de trinta.
(C) Mais de quatro e menos de quinze.
(D) Apenas um.
(E) Nenhum.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

Seja a a hipotenusa de um triângulo retângulo de altura relativa à hipotenusa $'h'$ e área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$, então

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{\sqrt{15}}{4}h^2 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{15}}{2}h \Leftrightarrow h=\frac{2}{\sqrt{15}}a>\frac{2}{\sqrt{16}}a=\frac{a}{2}$$

Considerando o arco capaz de 90° sobre uma circunferência de diâmetro a, conforme figura acima, o valor máximo da altura relativa à hipotenusa é $\frac{a}{2}$. Logo, não existe nenhum triângulo retângulo de altura relativa à hipotenusa h e área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$.

8) Seja $'x'$ um número real. Define-se $\lfloor x \rfloor$ como sendo o maior inteiro menor do que $'x'$, ou igual a $'x'$. Por exemplo, $\lfloor 2,7 \rfloor$; $\lfloor -3,6 \rfloor$; $\lfloor 5 \rfloor$ são, respectivamente, 2; -4 e 5. A solução da igualdade $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6$ é o intervalo $[a;b)$. O valor de $a+b$ é

(A) $\frac{15}{4}$

(B) $\frac{9}{2}$

(C) $\frac{11}{2}$

(D) $\frac{13}{3}$

(E) $\frac{17}{5}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n + \alpha, 0 \le \alpha < 1 \Rightarrow 2x = 2n + 2\alpha, 0 \le 2\alpha < 2$

$$\begin{cases} 0 \le \alpha < 0,5 \Rightarrow 0 \le 2\alpha < 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2n \\ 0,5 \le \alpha < 1 \Rightarrow 1 \le \alpha < 2 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2n+1 \end{cases}$$

Se $0 \le \alpha < 0,5$, então $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6 \Leftrightarrow n + 2n = 6 \Leftrightarrow n = 2$.

Se $0,5 \le \alpha < 1$, então $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6 \Leftrightarrow n + (2n+1) = 6 \Leftrightarrow n = \frac{5}{3}$, não convém pois $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x = 2 + \alpha, 0 \le \alpha < 0,5 \Rightarrow S = [2\,;2,5[\Rightarrow a = 2 \text{ e } b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + b = \frac{9}{2}$

9) ABC é um triângulo equilátero. Seja P um ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo APB é igual a 60°, que $PA = 6$ e $PC = 8$, a medida de PQ será

(A) $\frac{24}{7}$

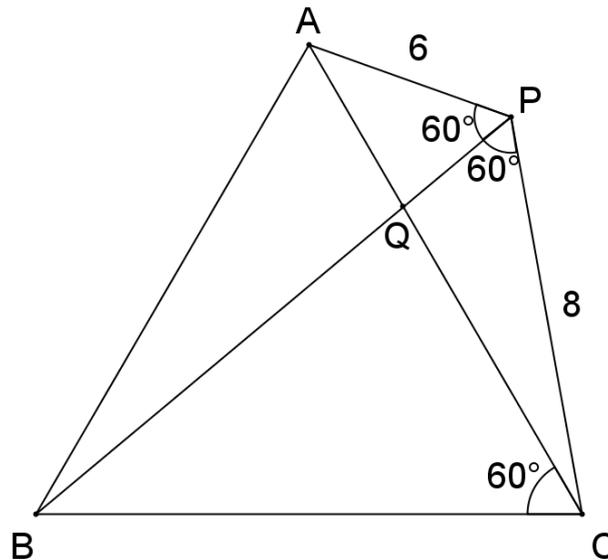
(B) $\frac{23}{5}$

(C) $\frac{19}{6}$

(D) $\frac{33}{14}$

(E) $\frac{11}{4}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$A\hat{P}B = A\hat{C}B = 60^\circ \Rightarrow \#ABCP$ é inscritível

$\Rightarrow A\hat{P}C = 180^\circ - A\hat{B}C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow C\hat{P}Q = 60^\circ$

$S(PAC) = S(PAQ) + S(PCQ) \Leftrightarrow \frac{6 \cdot 8}{2} \text{sen} 120^\circ = \frac{6 \cdot PQ}{2} \text{sen} 60^\circ + \frac{8 \cdot PQ}{2} \text{sen} 60^\circ$

$\Leftrightarrow 7 \cdot PQ = 24 \Leftrightarrow PQ = \frac{24}{7}$

10) A diferença entre um desconto de 50% e dois descontos sucessivos de 30% e 20% sobre o valor de $R\$ 40.000,00$ é um valor inteiro:
(A) múltiplo de 7.
(B) múltiplo de 9.
(C) múltiplo de 12.
(D) ímpar.
(E) zero, pois os descontos são iguais.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Um desconto de 50% sobre $R\$ 40.000,00$ é igual a $40000 \cdot 50\% = 20000$.
Dois descontos sucessivos de 30% e 20% resultam um valor final igual a
$40000 \cdot (100\% - 30\%) \cdot (100\% - 20\%) = 40000 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 22400$
Logo, o valor do desconto foi $40000 - 22400 = 17600$.
Assim, a diferença entre os descontos é $20000 - 17600 = 2400$, que é múltiplo de 12.

11) Sejam A, B e C conjuntos tais que: $A = \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, 3\}$ e $C = \{\{1\}, 2, 3\}$. Sendo X a união dos conjuntos $(A - C)$ e $(A - B)$, qual será o total de elementos de X?
(A) 1

(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$A - C = A$ e $A - B = \{\{1,2\},\{3\}\} \subset A \Rightarrow X = (A - C) \cup (A - B) = A$ que possui 3 elementos.

12) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$
(A) é vazio.
(B) é unitário.
(C) possui dois elementos.
(D) possui três elementos.
(E) possui quatro elementos.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2 \Leftrightarrow |2x+1| = 3x + 2$
Se $x < -\frac{1}{2}$, então $|2x+1| = 3x + 2 \Leftrightarrow -(2x+1) = 3x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$
Se $x \geq -\frac{1}{2}$, então $|2x+1| = 3x + 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3x + 2 \Leftrightarrow x = -1$ (não convém).
Logo, o conjunto solução da equação é $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$ que é um conjunto unitário.

13) Sabe-se que $p(x) = acx^4 + b(a+c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a+c)x + ac$ é um produto de dois polinômios do 2º grau e que os números a, b, c são reais não nulos com $(b^2 - 4ac)$ positivo. Nessas condições, é correto afirmar que
(A) $p(x)$ possui apenas uma raiz real.
(B) $p(x)$ possui duas raízes reais.
(C) $p(x)$ possui três raízes reais.
(D) $p(x)$ possui quatro raízes reais.
(E) $p(x)$ não possui raízes reais.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

$p(x) = acx^4 + b(a+c)x^3 + (a^2+b^2+c^2)x^2 + b(a+c)x + ac =$

$= acx^4 + abx^3 + bcx^3 + a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + abx + bcx + ac =$

$= ax^2(cx^2+bx+a) + bx(cx^2+bx+a) + c(cx^2+bx+a) = (cx^2+bx+a)(ax^2+bx+c)$

Como ambos os fatores possuem discriminante $b^2 - 4ac$ positivo, o polinômio $p(x)$ possui 4 raízes reais.

14) Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é 'k', pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

(A) $\frac{5k}{2}$

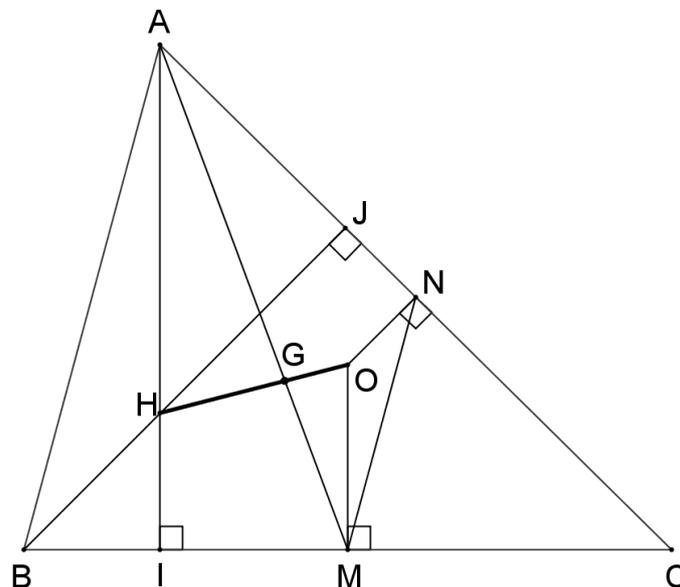
(B) $\frac{4k}{3}$

(C) $\frac{4k}{5}$

(D) $\frac{k}{2}$

(E) $\frac{k}{3}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Como o ΔABC é acutângulo não equilátero, o ortocentro, o circuncentro e o baricentro são distintos e interiores ao triângulo.

Sejam os pontos O e H, respectivamente, o circuncentro e o ortocentro do triângulo acutângulo ABC, e seja G o ponto de interseção da mediana AM com o segmento HO.

O segmento MN é base média do ΔABC, logo $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$.

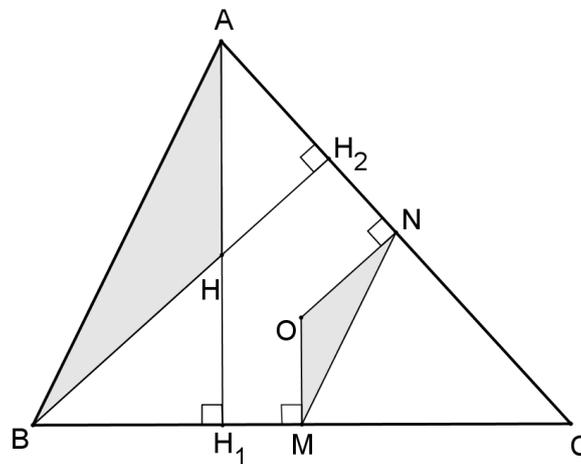
Como $MN \parallel AB$, $ON \parallel BH$ e $OM \parallel AH$, os triângulos OMN e HAB são semelhantes e como $MN = \frac{AB}{2}$, então $OM = \frac{AH}{2}$.

Como $OM \parallel AH$, os triângulos GAH e GMO são semelhantes e, como $OM = \frac{AH}{2}$, então $GM = \frac{AG}{2}$ e $GO = \frac{GH}{2}$.

Mas, sabemos que o ponto que divide a mediana na razão $2:1$ é o baricentro, portanto G é o baricentro do triângulo ABC e $GO = \frac{OH}{3} = \frac{k}{3}$.

Note que, demonstramos que o circuncentro, o ortocentro e o baricentro estão sempre alinhados (ou são coincidentes) e a reta que os contêm é chamada **reta de Euler**.

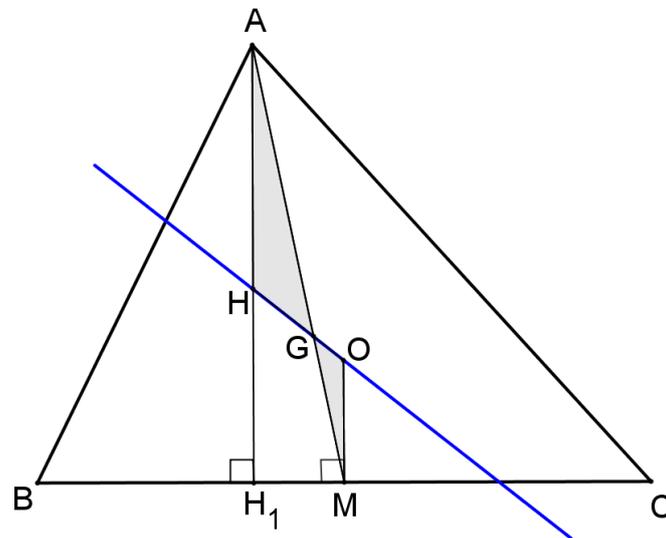
NOTA 3: Círculo de nove pontos

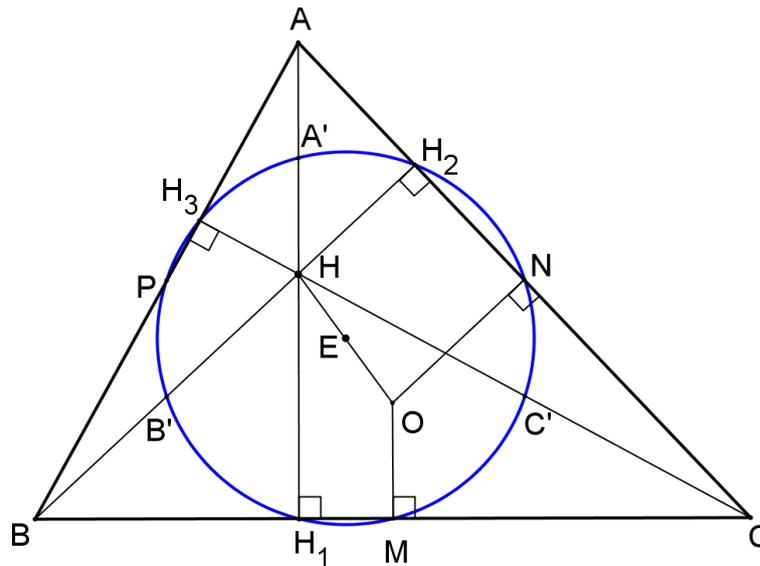
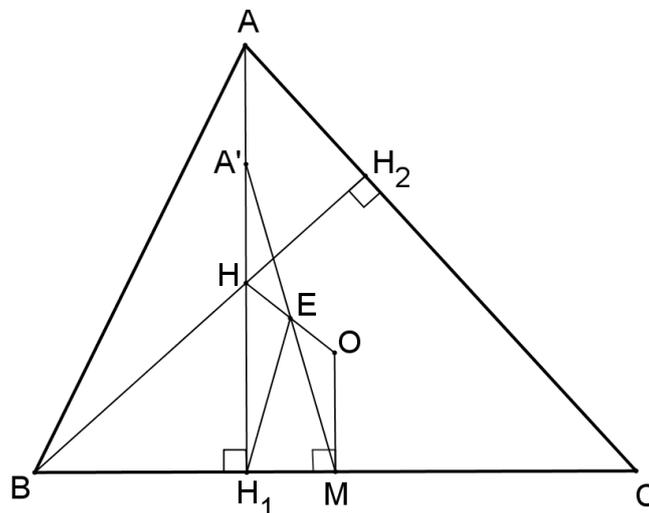
A distância do circuncentro de um triângulo a um dos lados é metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam AH_1 e BH_2 duas alturas do ΔABC que se cruzam no ortocentro H.

Sejam OM e ON segmentos pertencentes às mediatrizes dos lados BC e AC, que se cruzam no circuncentro O.

$$\begin{cases} AH \parallel OM \\ BH \parallel ON \\ AB \parallel MN \ \wedge \ MN = 2 \cdot AB \end{cases} \Rightarrow OM = \frac{AH}{2} \ \wedge \ ON = \frac{BH}{2}$$

Em um triângulo não equilátero, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados, sendo a reta que contém esses três pontos denominada **reta de Euler** do triângulo.
O baricentro de um triângulo não equilátero divide o segmento que une o ortocentro ao circuncentro na razão $2:1$.

DEMONSTRAÇÃO:
Na figura, sejam a mediana AM, o segmento HO que une o ortocentro e o circuncentro, e o ponto G interseção desses dois segmentos.
$\Delta AHG \sim \Delta MOG \Rightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{HG}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2$
Como G divide a mediana AM na razão $2:1$, então G é o baricentro do ΔABC.

O **círculo dos nove pontos** de um triângulo tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito; tem centro no ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro; contém os três pontos médios dos lados; contém os três pés das alturas; e contém os três pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja A' ponto médio de AH, então $AA' = A'H = OM$, então $\Delta A'HE \equiv \Delta MOE \Rightarrow A'E = EM \wedge HE = EO$.

Como $HA' = A'A$ e $HE = EO$, o segmento $A'E$ é base média do ΔAHO, então $A'E = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao ΔABC.

No triângulo retângulo $A'H_1M$, a ceviana H_1E é a mediana relativa à hipotenusa, então $H_1E = A'E = EM = \frac{R}{2}$.

Adotando procedimento análogo em relação aos vértices B e C, conclui-se que $H_2E = B'E = EN = \frac{R}{2}$ e $H_3E = C'E = EP = \frac{R}{2}$.

Assim, sabemos que os pontos M, N e P; H_1, H_2 e H_3; A', B' e C' todos distam $\frac{R}{2}$ do ponto E médio de HO, donde esses 9 pontos pertencem a um mesmo círculo de centro E e raio $\frac{R}{2}$.

Os triângulos ABC, BCH, CAH e ABH possuem o mesmo círculo dos nove pontos.

DEMONSTRAÇÃO:
Analisemos o ΔBCH. Os pés das alturas são os mesmos do ΔABC. Os pontos M, B' e C' são os pontos médios dos lados. O ponto A é o ortocentro do ΔBCH, logo os pontos A', N e P são os pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices. Donde se conclui que os dois triângulos possuem o mesmo círculo dos nove pontos e, inclusive, os nove pontos são os mesmos, apenas com papéis diferentes.

15) Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:
(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\}$
(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 5\}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \le x \le 7\}$
(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 \le x \le 9\}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Sejam x e y os números reais citados no enunciado. Como x e y não são simétricos, então $x \ne -y \Leftrightarrow x + y \ne 0$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \quad (*) \\ (x \cdot y)^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{18}{x^2} \quad (**) \end{cases}$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$, temos:

$$x^2 + \frac{18}{x^2} = 10 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 1 = 5 - \sqrt{16} < 5 - \sqrt{7} \le x^2 \le 5 + \sqrt{7} < 5 + \sqrt{16} = 9 \Rightarrow 1 < x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 3$$

Note que, quando tomamos, por exemplo, $x^2 = 5 + \sqrt{7}$, temos $y^2 = 5 - \sqrt{7}$ e vice-versa.
Logo, a única opção que contem pelo menos um dos números é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\}$.

16) No sistema $\begin{cases} 3x - y \cdot \sqrt{3} = 0 \\ x^2 \cdot y^{-2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, a quantidade de soluções inteiras para $'x'$ e $'y'$ é:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

(E) infinita.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Da primeira equação concluímos que $y = x\sqrt{3}$, como x e y não podem ser ambos nulos, eles também não podem ser ambos inteiros. Logo, o sistema não possui soluções inteiras.

17) No conjunto dos números reais, qual será o conjunto solução da inequação $\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \le 0,25^{\frac{1}{2}}$?

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{15} < x < \frac{15}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \frac{2}{15}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{15} < x < 0\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{15}{2} \le x < -\frac{2}{15}\right\}$

(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{15}{2}\right\}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \le 0,25^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{88}{11} - \frac{1}{x} \le \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 8 - \frac{1}{x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{15}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-15x}{2x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \frac{2}{15}\right\}$$

18) Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2xy = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $\left(x^2 - y^2\right)^6$?

(A) a^3b^6

(B) a^8b^6

(C) a^6b^2

(D) a^3b^6

(E) a^4b^6

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \Leftrightarrow 125\left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right) = 125b \Leftrightarrow (x-y)^3 = b \\ y^2 + x^2 + 2yx = a^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - y^2\right)^6 = (x+y)^6 (x-y)^6 = \left[(x+y)^2\right]^3 \cdot \left[(x-y)^3\right]^2 = \left[a^2\right]^3 \cdot [b]^2 = a^6b^2$$

19) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?

(A) 8040
(B) 4020
(C) 2010
(D) 1005
(E) 105

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$$

Como a média aritmética de dois números positivos é maior ou igual à sua média geométrica, temos:

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2010}} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} \Leftrightarrow \sqrt{pq} \geq 2\sqrt{2010} \Leftrightarrow pq \geq 8040$$

Logo, o valor mínimo do produto pq é 8040, que ocorre para $p = q = 2\sqrt{2010}$.

20) No conjunto '$\mathbb{R}$' dos números reais, qual será o conjunto solução da equação $\frac{\sqrt{3}}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2x - 2} - \frac{\sqrt{3}}{2x + 2}$?

(A) $\mathbb{R}$
(B) $\mathbb{R} - (-1;1)$
(C) $\mathbb{R} - [-1;1]$
(D) $\mathbb{R} - \{-1;1\}$
(E) $\mathbb{R} - [-1;1)$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Condição de existência: $\begin{cases} x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \\ x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{3}}{x^2-1}=\frac{\sqrt{3}}{2x-2}-\frac{\sqrt{3}}{2x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)} \Leftrightarrow 2=(x+1)-(x-1) \Leftrightarrow 2=2$$

$\Rightarrow S=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2009/2010

1) Num quadrado $ABCD$ de lado 6 cm, traça-se a circunferência K de centro em A e raio 4 cm. Qual é medida, em cm, do raio da circunferência tangente exterior a K e tangente ao lado BC no ponto C?

(A) $2,4$

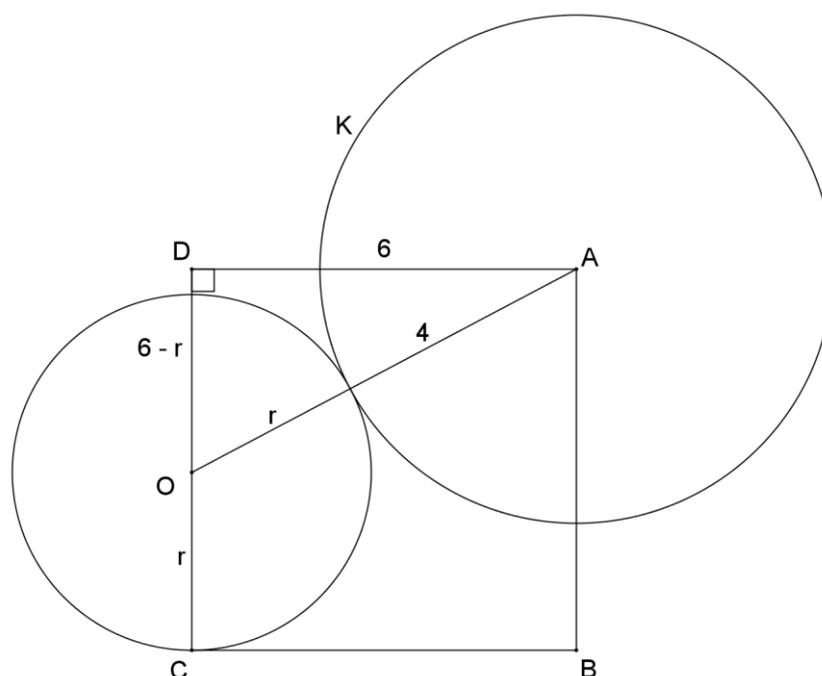
(B) $2,5$

(C) $2,6$

(D) $2,7$

(E) $2,8$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADO, temos:

$$(6-r)^2 + 6^2 = (r+4)^2 \Leftrightarrow 36 - 12r + r^2 + 36 = r^2 + 8r + 16 \Leftrightarrow 20r = 56 \Leftrightarrow r = 2,8$$

2) A área de um quadrado de 5 cm de lado, na unidade u definida como sendo a área de um círculo de raio 1 cm, é:

(A) exatamente 25.

(B) exatamente $12,5$.

(C) aproximadamente 8.

(D) aproximadamente 6.

(E) aproximadamente 5.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$u = \pi \cdot 1^2 \text{ cm}^2 = \pi \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{\pi} u$

$S = 5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2 = 25 \cdot \frac{1}{\pi} u = \frac{25}{\pi} u \approx 8u$

3) Sabe-se que: o número natural K dividido pelo número natural A dá quociente 56 e resto zero; K dividido pelo número natural B dá quociente 21 e resto zero; e os algarismos de A são os mesmos de B e ambos possuem dois algarismos, porém em ordem inversa. A soma dos algarismos de K é igual a:

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Utilizando o algoritmo da divisão de Euclides, temos: $K = 56A = 21B \ (*)$.

Como A e B são números que possuem os mesmos dois algarismos em ordem inversa, então podemos representá-los da seguinte forma: $A = \overline{xy} = 10x + y$ e $B = \overline{yx} = 10y + x \ (**)$.

Substituindo $(**)$ em $(*)$, temos: $56(10x + y) = 21(10y + x) \Leftrightarrow 7x = 2y$.

Como x e y são algarismos, então $x = 2$ e $y = 7$.

Portanto, $K = 56A = 56 \cdot \overline{xy} = 56 \cdot 27 = 1512$, cuja soma dos algarismos é 9.

4) Sobre o sistema formado por $3x + 4y = 7$ e $6x + 8y = 15$, pode-se afirmar que é:

(A) indeterminado.
(B) determinado e $9x + 12y = 22$.
(C) determinado e $x = y = 0$.
(D) determinado e $x = -y \neq 0$.
(E) impossível.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 6x + 8y = 15 \end{cases}$$

Como $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \neq \frac{7}{15}$, o então sistema é impossível.

5) Um funcionário usa uma empilhadeira para transportar bobinas de 70 kg ou de 45 kg, sendo uma de cada vez. Quantas viagens com uma carga deverá fazer, no mínimo, para transportar exatamente uma tonelada dessa carga?
(A) 18
(B) 17
(C) 16
(D) 15
(E) 14

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Sendo m o número de viagens com a carga de 70 kg e n o número de viagens com a carga de 45 kg, temos:

$$m\cdot 70+n\cdot 45=1000 \Leftrightarrow 14m+9n=200.$$

Resolvendo a equação Diofantina: $\begin{cases} m=400-9t \\ n=-600+14t \end{cases}, t\in\mathbb{Z}$.

$\begin{cases} m=400-9t\ge 0 \Leftrightarrow t\le 44 \\ n=-600+14t\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 43 \end{cases} \Rightarrow t\in\{43,44\}$

$m+n=-200+5t \Rightarrow \begin{cases} t=43 \Rightarrow m+n=15 \\ t=44 \Rightarrow m+n=20 \end{cases}$

Portanto, o número mínimo de viagens é 15.

NOTA 4: Equação diofantina linear

Um equação diofantina linear é uma equação da forma $ax+by=c$, onde a, b e c são inteiros e para a qual desejamos encontrar soluções inteiras x e y.

Sejam a e b inteiros positivos e $d=\text{mdc}(a,b)$. Se $d\nmid c$, então a equação $ax+by=c$ não possui nenhuma solução inteira. Se $d\,|\,c$, então ela possui infinitas soluções e se $x=x_0$ e $y=y_0$ é uma solução particular, então todas as soluções são dadas por

$$\begin{cases} x=x_0+(b/d)k \\ y=y_0-(a/d)k \end{cases}$$

onde k é um inteiro.

Teorema de Silvester:
Sejam a e b inteiro positivos primos entre si, então $ab-a-b$ é o maior valor inteiro positivo de $.c.$ para o qual a equação $ax+by=c$ não possui solução nos inteiros não negativos $(\mathbb{Z}_+)$.

Exemplo: Se x e y são números naturais e $19x+97y=1997$, então o menor valor possível de $x+y$ é
a) 21 b) 23 c) 38 d) 41 e) 47

RESOLUÇÃO: b

Inicialmente, observemos que $\text{mdc}(19,97)=1$ e que $x_0=100$ e $y_0=1$ é uma solução particular. Assim, temos:

$19x+97y=1997 \Rightarrow x=100+97t \ \wedge \ y=1-19t, \ t\in\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l}100+97t\geq 0\Rightarrow t\geq -1\\ 1-19t\geq 0\Rightarrow t\leq 0\end{array}\right\}\Rightarrow t=-1 \vee t=0$$

$x+y=101+78t\Rightarrow (x+y)_{MIN}=101+78\cdot(-1)=23$

REFERÊNCIA: Todev. R. – The South African Mathematics Olympiads (1997 – 2009) – pg. 12.

6) A menor raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, com $abc\neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m + n" é expresso por:

(A) $\frac{3abc-b^3}{a^2c}$

(B) $\frac{3abc+b^3}{a^2c}$

(C) $\frac{3abc-b^3}{c^2a}$

(D) $\frac{abc+b^3}{c^2a}$

(E) $\frac{abc-b^3}{c^2a}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Sejam r_1 e r_2, com $r_1<r_2$, as raízes de $ax^2+bx+c=0$.

Pelas relações entre coeficientes e raízes, temos: $S=r_1+r_2=-\frac{b}{a}$ e $P=r_1\cdot r_2=\frac{c}{a}$ $(*)$.

Como a menor raiz da equação $ax^2+bx+c=0$ é a média geométrica entre "m" e a maior raiz e a maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz, temos:

$r_1=\sqrt{m\cdot r_2}\Rightarrow m=\frac{r_1^2}{r_2}$

$r_2=\sqrt{n\cdot r_1}\Rightarrow n=\frac{r_2^2}{r_1}$

Somando as duas igualdades acima e depois substituindo as relações $(*)$, temos:

$$m+n=\frac{r_1^2}{r_2}+\frac{r_2^2}{r_1}=\frac{r_1^3+r_2^3}{r_1\cdot r_2}=\frac{(r_1+r_2)^3-3r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1\cdot r_2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c}{a}}=$$

$$=\left(-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}\right)\cdot\frac{a}{c}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

7) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:

(A) $5/3$
(B) $3/5$
(C) $2/5$
(D) $5/2$
(E) $3/2$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Numa mistura de x litros de A e y litros de B, a quantidade de álcool é $0,2x+y$. Se o percentual de álcool nesse combustível é $50\%=\frac{1}{2}$, então

$$\frac{0,2x+y}{x+y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0,4x+2y=x+y\Leftrightarrow y=0,6x\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{0,6}=\frac{5}{3}.$$

8) Sobre o lado maior de um retângulo de base 1 e altura 2 constrói-se um retângulo de base 2 e altura 3; sobre o maior lado desse último, constrói-se um retângulo de base 3 e altura 4; e assim sucessivamente, até se construir o retângulo de base 99 e altura 100. Com quantos zeros termina o produto das áreas de cada um desses retângulos?

(A) 39
(B) 40
(C) 46
(D) 78
(E) 80

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

O produto das áreas dos retângulos é dado por $P=(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdot\ldots\cdot(99\cdot 100)=\frac{(100!)^2}{100}$, onde $100!=100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Como 100! termina em $\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{25}\right\rfloor=20+4=24$ zeros (fórmula de Polignac), então $P=\frac{(100!)^2}{100}$ termina em $(24+24)-2=46$ zeros.

9) O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^8}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

(A) $[5;+\infty[\cup\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

(B) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[5;+\infty[$

(C) $]-\infty;+\infty[$

(D) $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\cup[5;+\infty[$

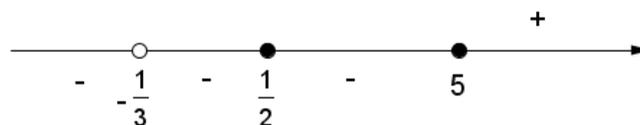
(E) $\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[5;+\infty[$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^8}\geq 0$$

No quociente acima, 5 é raiz de multiplicidade ímpar, $\frac{1}{2}$ é raiz de multiplicidade par e $-\frac{1}{3}$ é um ponto de descontinuidade (pois anula o denominador) de multiplicidade par.

Dispondo as raízes e pontos de descontinuidade na reta real, obtemos a figura.

Portanto, pelo método dos intervalos, o conjunto solução é $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[5;+\infty[$.

10) Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{\text{med(BH)}}{\text{med(IH)}}$ é igual a:

(A) $\frac{\text{med(BC)}}{\text{med(AH)}}$

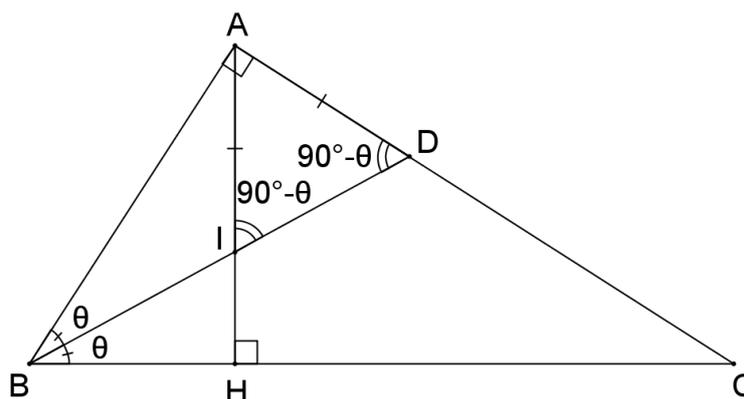
(B) $\frac{\text{med(BC)}}{\text{med(AD)}}$

(C) $\frac{\text{med(BC)}}{\text{med(CD)}}$

(D) $\frac{\text{med(AD)}}{\text{med(AI)}}$

(E) $\frac{\text{med(AD)}}{\text{med(IH)}}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

1ª SOLUÇÃO:

Teorema das bissetrizes no ΔABH: $\frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AI}$

ΔADI é isósceles $\Rightarrow AI = AD \Rightarrow \frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD}$

Teorema das bissetrizes no ΔABC: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$

2ª SOLUÇÃO:

$\operatorname{cotg}\theta = \frac{BH}{IH} = \frac{AB}{AD}$

Lei dos senos no ΔBCD: $\frac{BC}{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta)} = \frac{CD}{\operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{cotg}\theta$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\theta = \frac{BH}{HI} = \frac{BC}{CD}$

11) Sendo h_A, h_B e h_C as medidas das alturas; m_A, m_B e m_C as medidas das medianas; e b_A, b_B e b_C as medidas das bissetrizes internas de um triângulo ABC, analise as afirmativas a seguir.

I – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$ e $\frac{1}{h_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

II – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{m_A}$, $\frac{1}{m_B}$ e $\frac{1}{m_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

III – O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{b_A}$, $\frac{1}{b_B}$ e $\frac{1}{b_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

Pode-se concluir que
(A) apenas I é sempre verdadeira.
(B) apenas II é sempre verdadeira.
(C) apenas III é sempre verdadeira.
(D) I, II e III são sempre verdadeiras.
(E) I, II e III são sempre falsas.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
I - VERDADEIRA

A área do triângulo ABC é dada por $S = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2} \Leftrightarrow 2S = \frac{a}{\frac{1}{h_A}} = \frac{b}{\frac{1}{h_B}} = \frac{c}{\frac{1}{h_C}}$. Assim, o ΔABC e o triângulo de lados $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$ e $\frac{1}{h_C}$ têm lados proporcionais e, portanto são semelhantes.

II – FALSA

Considere, como contra exemplo, um triângulo retângulo isósceles de lados $a = 2$, $b = 2$ e $c = 2\sqrt{2}$.
As medianas são $m_A = \sqrt{5}$, $m_B = \sqrt{5}$ e $m_C = \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{m_A^2} + \frac{1}{m_B^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{m_C^2}$$

Logo, o triângulo de lados $\frac{1}{m_A}$, $\frac{1}{m_B}$ e $\frac{1}{m_C}$ não é retângulo e, consequentemente, não é semelhante ao triângulo original.

III – FALSA

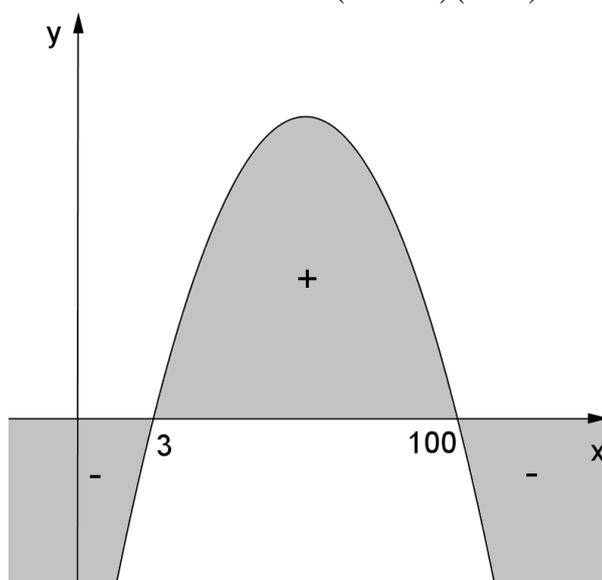
Considere, como contra exemplo, um triângulo retângulo isósceles de lados $a = 2$, $b = 2$ e $c = 2\sqrt{2}$.
As bissetrizes são $b_A = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, $b_B = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $b_C = \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{b_A^2} + \frac{1}{b_B^2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{1}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{b_C^2}$$

Logo, o triângulo de lados $\frac{1}{b_A}$, $\frac{1}{b_B}$ e $\frac{1}{b_C}$ não é retângulo e, consequentemente, não é semelhante ao triângulo original.

12) Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x - x^2 - 300}$?
(A) 100
(B) 99
(C) 98
(D) 97
(E) 96

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$\sqrt{103x - x^2 - 300} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^2 + 103x - 300 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-100)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 100$

A quantidade de valores inteiros de x é $100 - 3 + 1 = 98$

13) O número natural 198 está escrito na base 10. Em quantas bases de numeração o número dado é escrito com três algarismos?
(A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 9

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Se o número 198 é escrito com 3 algarismos na base b, então $b^2 \le 198 < b^3$.

$$b \in \mathbb{Z}_+^* \Rightarrow \begin{cases} b^2 \le 198 \Leftrightarrow b \le 14 \\ b^3 > 198 \Leftrightarrow b \ge 6 \end{cases} \Rightarrow b \in \{6, 7, 8, \ldots, 14\}$$

A quantidade de bases de numeração é $14 - 6 + 1 = 9$.

14) Os números $\frac{4x}{2-x}$ e $\frac{2-x}{4x}$ são inteiros e positivos, com $x \in \mathbb{R} - \{0; 2\}$. Nessas condições, pode-se concluir que:
(A) $x < 0$
(B) $0 < x < 1/3$
(C) $1/3 < x < 1/2$
(D) $1/2 < x < 2/3$
(E) $2/3 < x < 1$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Se um número e seu inverso são inteiros e positivos, então ambos são iguais a 1.

$$\frac{4x}{2-x} = 1 \Leftrightarrow 4x = 2 - x \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} = 0,4 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

Note que x não poderia assumir os valores 0 ou 2.

15) Dado o número $N = \left[(2009)^{40} - 1\right]^{40} - 2010$, analise as afirmativas a seguir.
I. N é divisível por 2008.
II. N é divisível por 2009.
III. N é divisível por $2009^{40} - 2010$.
Com base nos dados apresentados, pode-se concluir que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**
I. FALSA

$$N = \left[(2009)^{40} - 1\right]^{40} - 2010 \equiv \left[(1)^{40} - 1\right]^{40} - 2 \equiv -2 \pmod{2008}$$

II. VERDADEIRA

$N=\left[\left(2009\right)^{40}-1\right]^{40}-2010\equiv\left[\left(0\right)^{40}-1\right]^{40}-1\equiv 0\left(\text{mod}\,2009\right)$

III. VERDADEIRA

1ª SOLUÇÃO:

$2009^{40}-1\equiv 2009\left(\text{mod}\,2009^{40}-2010\right)$

$\Rightarrow N=\left[\left(2009\right)^{40}-1\right]^{40}-2010\equiv[2009]^{40}-2010\equiv 0\left(\text{mod}\,2009^{40}-2010\right)$

2ª SOLUÇÃO:

Seja $p(x)=(x-1)^{40}-2010$, então o resto da divisão de $p(x)$ por $x-2010$ é igual a $p\left(2010\right)=2009^{40}-2010$.

Concluímos que, se $x=2009^{40}$, então

$\left[(2009)^{40}-1\right]^{40}-2010=\left(2009^{40}-2010\right)\cdot k+2009^{40}-2010=\left(2009^{40}-2010\right)\cdot(k+1)$

Logo, o resto da divisão de $\left[(2009)^{40}-1\right]^{40}-2010$ por $2009^{40}-2010$ é zero.

16) Em um trapézio isósceles $ABCD$, de base maior AB, está inscrito um arco de circunferência AMB, onde M é ponto médio da base menor CD. O ângulo $A\hat{B}C$, formado pela base maior AB e pelo lado não paralelo BC mede 60°. Qual é a razão entre as medidas da base AB e do comprimento do arco AMB, sabendo-se que os lados congruentes desse trapézio são tangentes ao arco AMB nos pontos A e B?

(A) $\frac{3}{\pi}$

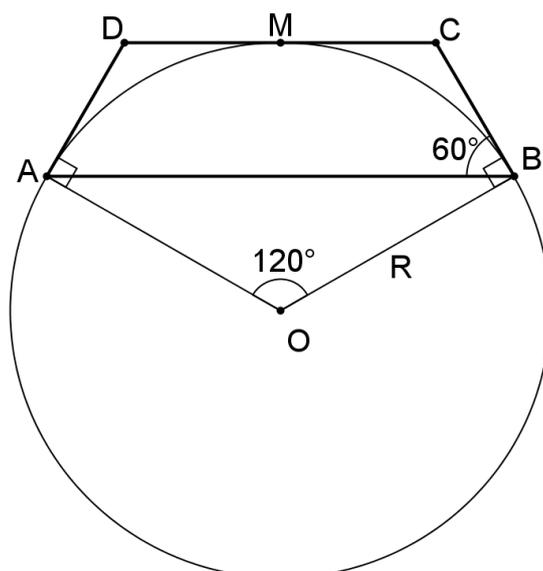
(B) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(E) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

O ângulo $A\hat{B}C = 60^\circ$ é um ângulo de segmento, então $AMB = 120^\circ$.
Portanto, AB é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

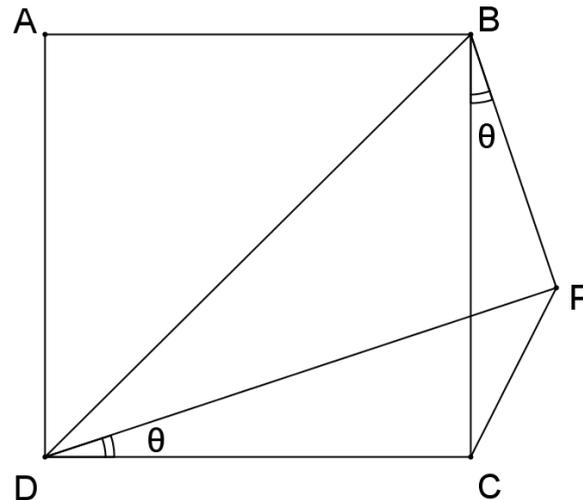
Supondo que a circunferência tenha raio R, então $AB = R\sqrt{3}$ e o comprimento de AMB é $\frac{1}{3} \cdot 2\pi R$.

Logo, a razão pedida é $\frac{R\sqrt{3}}{\frac{2\pi R}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

17) Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$ constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero $PCDB$ convexo. Se o ângulo PDC é congruente ao ângulo PBC, pode-se afirmar que o quadrilátero $PCDB$ é

(A) sempre inscritível em um círculo.
(B) sempre circunscritível a um círculo.
(C) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.
(D) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.
(E) impossível de ser inscrito em um círculo.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Como $P\hat{D}C = P\hat{B}C = \theta$, então os pontos B e D estão num arco capaz de θ sobre PC, portanto o quadrilátero PCDB é inscritível.

18) Analise as afirmativas a seguir.

I) $\left(3^{0,333...}\right)^{27} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3}$

II) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = 2-\sqrt{3}$

III) 10^{3k} tem $\left(3k+1\right)$ algarismos, qualquer que seja o número natural k.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
I. VERDADEIRA

$$\left(3^{0,333...}\right)^{27} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{27} = 3^{\frac{1}{3}\cdot 27} = 3^9 \text{ e } \left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^3} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{27} = 3^{\frac{1}{3}\cdot 27} = 3^9$$

II. VERDADEIRA

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}$$

III. VERDADEIRA

Se $k = 0 \Rightarrow 10^{3k} = 10^0 = 1$, logo 10^{3k} possui $\left(3\cdot 0+1\right) = 1$ algarismo.

Se $k \neq 0 \Rightarrow 10^{3k} = 1\underbrace{00\ldots0}_{3k \text{ zeros}}$, *logo* 10^{3k} *possui* $\left(3k+1\right)$ *algarismos para qualquer natural* k.

19) Os números naturais x e 18 são, nessa ordem, inversamente proporcionais aos números naturais y e 45. Se $x > y$, quantos são os valores possíveis para x?
(A) 9
(B) 10
(C) 15
(D) 18
(E) 20

RESPOSTA: B

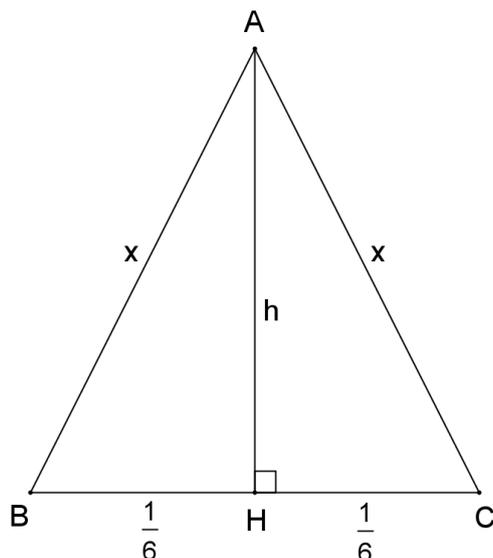
RESOLUÇÃO:
$$\frac{x}{\frac{1}{y}} = \frac{18}{\frac{1}{45}} \Leftrightarrow xy = 18 \cdot 45 = 810$$
Portanto, x e y são divisores de 810.
É dado que $x > y$, então, para encontrar a quantidade de valores de x, basta calcular a metade da quantidade de divisores naturais de 810 (que não é um quadrado perfeito), pois esses aparecem sempre aos pares, um maior e outro menor que $\sqrt{810}$.
A quantidade de divisores positivos de $810 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5$ é $d = (1+1)(4+1)(1+1) = 20$. Portanto, há $\frac{20}{2} = 10$ possíveis valores de x.

20) O triângulo de lados $0,333\ldots\text{ cm}$, $0,5\text{ cm}$ e $0,666\ldots\text{ cm}$ é equivalente ao triângulo isósceles de base $0,333\ldots\text{ cm}$ e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{151}}{24}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{\sqrt{257}}{48}$
(E) $\frac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$$0,333\ldots = \frac{1}{3};\ 0,5 = \frac{1}{2};\ 0,666\ldots = \frac{2}{3} \Rightarrow 2p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$$

Utilizando a Fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo:

$$S=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{15}}{48}\text{ cm}^2.$$

O triângulo isósceles da figura tem base $0,333\ldots=\frac{1}{3}$ e deve possuir área igual a $\frac{\sqrt{15}}{48}\text{ cm}^2$, então

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot h=\frac{\sqrt{15}}{48}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔACH, temos:

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{15}{64}+\frac{1}{36}=\frac{151}{64\cdot 9}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{151}}{24}\text{ cm}$$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2008/2009

1) Sabendo-se que $2x+3y=12$ e que $mx+4y=16$ são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições?
(A) Um
(B) Dois
(C) Três
(D) Quatro
(E) Infinitos

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se as equações são sempre compatíveis simultaneamente, então o sistema formado pelas duas equações não é impossível.

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ mx+4y=16 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado quando $\frac{2}{m} \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow m \neq \frac{8}{3}$.

Quando $m=\frac{8}{3}$, temos $\frac{2}{8/3}=\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$. Nesse caso, o sistema é possível e indeterminado.

Logo, para todos os valores reais de m, o sistema é compatível.
Então, as condições do enunciado são satisfeitas para **infinitos** valores de m.

2) O número $a \neq 0$ tem inverso igual a b. Sabendo-se que $a+b=2$, qual é o valor de $(a^3+b^3)(a^4-b^4)$?
(A) 8
(B) 6
(C) 4
(D) 2
(E) 0

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$b=\frac{1}{a}$$

$$a+b=2 \Leftrightarrow a+\frac{1}{a}=2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow (a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ e } b=1$$

$$(a^3+b^3)(a^4-b^4)=(1^3+1^3)(1^4-1^4)=0$$

3) Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$, com x real e $x \neq \pm 1$?

(A) 16
(B) 20
(C) 23
(D) 25
(E) 30

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1 \Leftrightarrow 2(x+1)+3(x-1)=(x-1)(x+1) \Leftrightarrow 2x+2+3x-3=x^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=5$

Portanto, a soma dos quadrados das raízes é $0^2+5^2=25$.

4) O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre os naturais a, x e b, são respectivamente iguais a 1680 e 120. Sendo $a<x<b$, quantos são os valores de x que satisfazem essas condições?
(A) Nenhum.
(B) Apenas um.
(C) Apenas dois.
(D) Apenas três.
(E) Apenas quatro.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$\text{MDC}(a,x,b) \le a < x < b \le \text{MMC}(a,x,b) \Rightarrow 120 < x < 1680$

$\text{MMC}(a,x,b) = 1680 = 120 \cdot 14 \Rightarrow x \mid 1680$

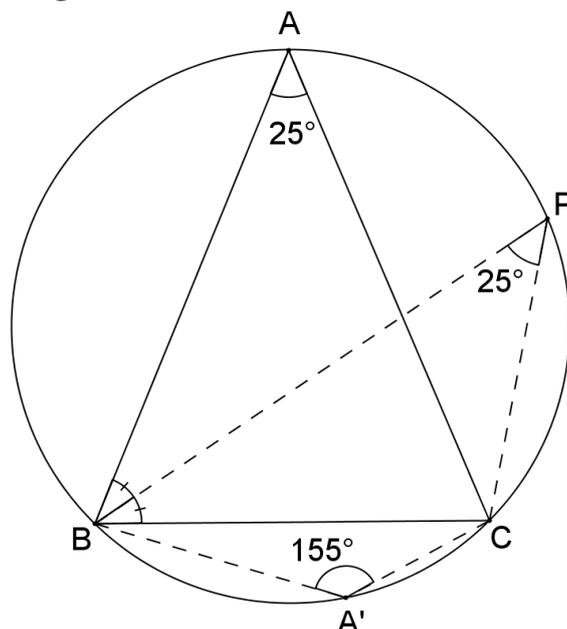
$\text{MDC}(a,x,b) = 120 \Rightarrow 120 \mid x$

$\Rightarrow x \in M(120) \cap D(1680) \Leftrightarrow x \in \{120, 120\cdot 2, 120\cdot 7, 120\cdot 14\} = \{120, 240, 840, 1680\}$

Como $x \ne 120$ e $x \ne 1680$, então $x \in \{240, 840\}$. Logo, há dois valores possíveis para x.

5) Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P pertencente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo $B\hat{P}C$ tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:
(A) 25°
(B) 45°
(C) 50°
(D) 65°
(E) 85°

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

O ponto P é a interseção da bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ com o círculo circunscrito ao ΔABC.

$B\hat{P}C = 25^o \Rightarrow BC_{menor} = 50°$

O ângulo $\hat{A}$ é inscrito ao arco BC, então $\hat{A} = 25^o$ ou $\hat{A} = 155^o$.

Mas, como o ΔABC é acutângulo, então $\hat{A} = 25^o$.

6) Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo $ABCD$. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

(A) 120°

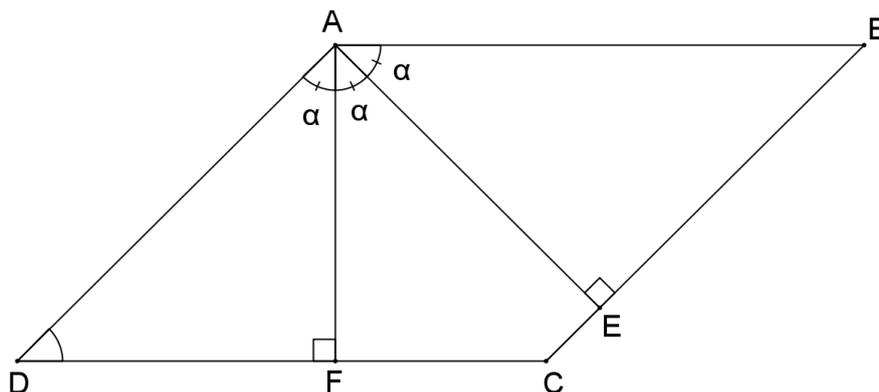
(B) 135°

(C) 150°

(D) 165°

(E) 175°

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Como o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então $\hat{D} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 3\alpha$.

No triângulo retângulo AFD, temos $\hat{D} = 90^\circ - \alpha$.

Portanto, $180^\circ - 3\alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Logo, o maior ângulo interno do paralelogramo é $3\alpha = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

7) A solução de $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt[3]{-1 + 6x - 12x^2 + 8x^3}$ no campo dos reais é

(A) o conjunto vazio.

(B) $\{1/2\}$

(C) $\{-1/2, 1/2\}$

(D) $[1/2, +\infty[$

(E) $]-\infty, +\infty[$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x - 1|$$

$$\sqrt[3]{-1 + 6x - 12x^2 + 8x^3} = \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 2x - 1$$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt[3]{-1 + 6x - 12x^2 + 8x^3} \Leftrightarrow |2x - 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$S = [1/2, +\infty[$$

8) Quantas vezes inteiras a raiz quadrada de $0,5$ cabe na raiz cúbica de 10?

(A) Uma.

(B) Duas.

(C) Três.

(D) Quatro.

(E) Cinco.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{0,5}}=\frac{\sqrt[6]{10^2}}{\sqrt[6]{0,5^3}}=\sqrt[6]{\frac{100}{\frac{1}{8}}}=\sqrt[6]{800}$$

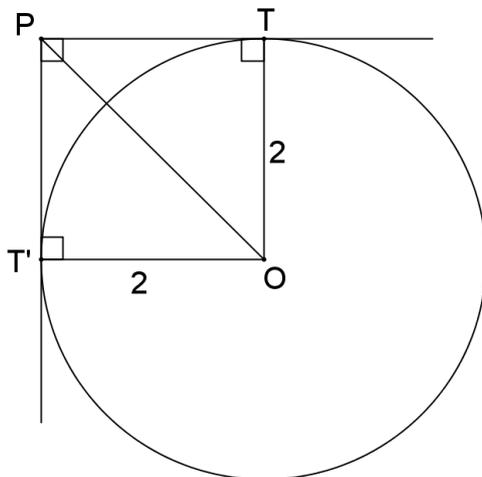
$$3^6=729<800<4096=4^6 \Leftrightarrow 3<\sqrt[6]{800}<4$$

Logo, $\sqrt{0,5}$ cabe 3 vezes inteiras em $\sqrt[3]{10}$.

9) Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre (use $\pi=3,14$)

(A) vinte e um e vinte e dois.
(B) vinte e dois e vinte e três.
(C) vinte e três e vinte e quatro.
(D) vinte e quatro e vinte e cinco.
(E) vinte e cinco e vinte e seis.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente.)**

O quadrilátero $PTOT'$ é um quadrado, então $OP=2\sqrt{2}$.

Como a distância do ponto P ao centro O da circunferência é constante e igual a $2\sqrt{2}$, então o lugar geométrico de P é um círculo de centro O e raio $2\sqrt{2}$.

Portanto, a área da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano é $S=\pi\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi\approx 8\cdot 3,14=25,12\text{ cm}^2$.

10) Num determinado jogo, o apostador recebe, toda vez que ganha, o valor apostado inicialmente, mais 25% do mesmo; e recebe, toda vez que perde, apenas 25% do valor apostado inicialmente. Sabendo-se que foi feita uma aposta inicial de uma quantia x e que foram realizadas quatro jogadas, sempre sendo apostado o valor total obtido na jogada anterior, das quais ganhou-se duas e perdeu-se duas, qual é, aproximadamente, o percentual de x obtido no final?

(A) $3,7$
(B) $4,7$
(C) $5,7$
(D) $6,7$
(E) $9,8$

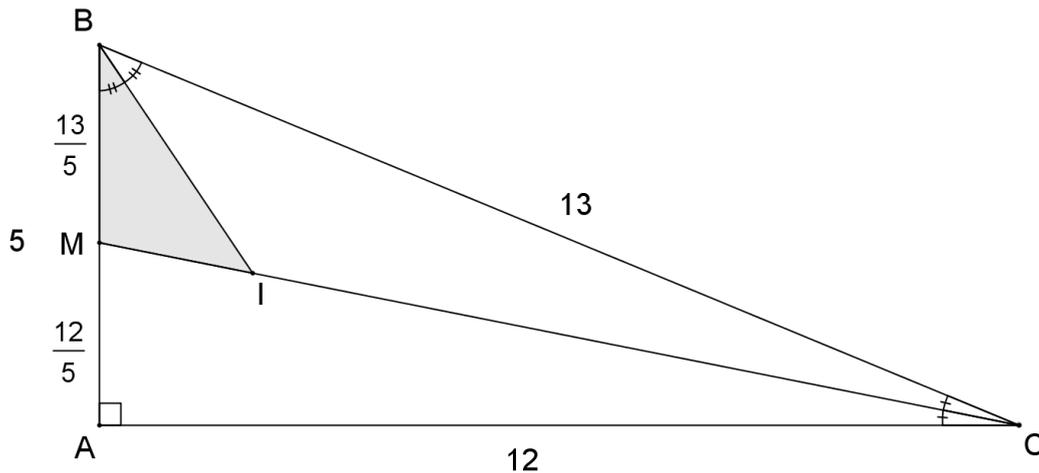
RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Cada vez que o apostador ganha multiplica o valor apostado pelo fator $(100\% + 25\%) = 1,25$ e cada vez que ele perde multiplica o valor apostado pelo fator $25\% = 0,25$. Portanto, a ordem das vitórias e derrotas não afeta o resultado final.
Como o apostador ganhou duas e perdeu duas, a quantia inicial x será multiplicada duas vezes por $1,25$ e duas vezes por $0,25$. Logo, a quantia final é dada por $x \cdot (1,25)^2 \cdot (0,25)^2 = x \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25x}{256} \approx 0,098x = 9,8\% \cdot x$.
Portanto, o percentual de x obtido no final é, aproximadamente, $9,8$.

11) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos $AC = 12$ e $AB = 5$. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sendo I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

(A) $\frac{1}{50}$
(B) $\frac{13}{60}$
(C) $\frac{1}{30}$
(D) $\frac{13}{150}$
(E) $\frac{2}{25}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao ΔABC, temos: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow BC = 13$.
Como CM é bissetriz do ΔABC, então, pelo teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{BM}{13} = \frac{AM}{12} = \frac{BM + AM}{13+12} = \frac{5}{25} \Leftrightarrow BM = \frac{13}{5} \text{ e } AM = \frac{12}{5}.$$

Como I é o incentro do ΔABC, então BI é bissetriz interna do ΔBCM. Aplicando-se novamente o teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{MI}{BM} = \frac{IC}{BC} \Leftrightarrow \frac{MI}{13/5} = \frac{IC}{13} \Leftrightarrow \frac{MI}{IC} = \frac{1}{5}.$$

No caso de triângulos de vértice comum e bases sobre a mesma reta, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases, então

$$\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} = \frac{BM}{AB} = \frac{13/5}{5} = \frac{13}{25} \Leftrightarrow S_{BMC} = \frac{13}{25} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{S_{BMI}}{S_{BMC}} = \frac{MI}{MC} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow S_{BMI} = \frac{1}{6} \cdot S_{BMC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{25} \cdot S_{ABC} = \frac{13}{150} S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{BMI}}{S_{ABC}} = \frac{13}{150}.$$

12) Sejam y e z números reais distintos não nulos tais que $\frac{4}{yz} + \frac{y^2}{2z} + \frac{z^2}{2y} = 3$. Qual é o valor de $y + z$?

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 2
(E) 3

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Vamos começar lembrando a identidade de Gauss:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right].$$

$$\frac{4}{yz}+\frac{y^2}{2z}+\frac{z^2}{2y}=3 \Leftrightarrow 8+y^3+z^3=6yz \Leftrightarrow 2^3+y^3+z^3-3\cdot 2yz=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2+y+z)\left[(y-2)^2+(z-2)^2+(y-z)^2\right]=0$$

Como y e z são distintos, o termo entre colchetes é não nulo, então $2+y+z=0 \Leftrightarrow y+z=-2$.

NOTA 5: Identidades de Gauss:

$$\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-ab\right)}$$
$$\mathbf{=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]}$$

Note que, se a, b e c são distintos dois a dois, então $a+b+c=0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$.
Observe também que se, a, b e c são números não negativos, então $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ que é uma expressão da desigualdade da média aritmética e média geométrica para três números

Demonstração:

$a^3+b^3+c^3-3abc=$

$=a^3+\underline{3a^2b}+\underline{3ab^2}+b^3+c^3-\underline{3a^2b}-\underline{3ab^2}-3abc=$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)=$

$=(a+b+c)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)=$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-ab\right)=$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]$

13) Uma expressão constituída por números de dois algarismos é do tipo $\square\square\times\square\square-\square\square$, no qual cada quadrinho deve ser ocupado por um algarismo, num total de seis algarismos para toda a expressão. Sabendo-se que os algarismos que preencherão os quadrinhos são todos distintos, o menor valor possível para toda a expressão é
(Observação: números do tipo 07 são considerados de um algarismo)
(A) 123
(B) 132
(C) 213
(D) 231
(E) 312

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Para obtermos o menor valor possível os números que serão multiplicados devem começar por 1 e 2, e seus algarismos das unidades devem ser 0 e 3, respectivamente. O número que será subtraído deve ser o maior possível, ou seja, 98. Portanto, a expressão é $\boxed{1}\boxed{0}\times\boxed{2}\boxed{3}-\boxed{9}\boxed{8}=230-98=132$.

14) De uma determinada quantidade entre 500 e 1000 DVDs, se forem feitos lotes de 5 DVDs sobram 2; se forem feitos lotes com 12 DVDs sobram 9 e se forem feitos lotes com 14 DVDs sobram 11. Qual é a menor quantidade, acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra?
(A) 6
(B) 8
(C) 9
(D) 13
(E) 15

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sendo N a quantidade de DVDs, pode-se escrever:
$N=5a+2,\ a\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow N+3=5a+5=5(a+1)$
$N=12b+9,\ b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow N+3=12b+12=12(b+1)$
$N=14c+11,\ c\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow N+3=14c+14=14(c+1)$
Logo, $N+3$ é múltiplo do $\text{MMC}(5,12,14)=420$ e existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $N+3=420k$.
Como a quantidade de DVDs está entre 500 e 1000, temos:
$500<N<1000\Leftrightarrow 503<N+3<1003\Leftrightarrow 503<420k<1003\Leftrightarrow k=2$
$\Rightarrow N=420\cdot 2-3=837=3^3\cdot 31$
A menor quantidade acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra é dada pelo menor divisor de 837 maior do que 5, ou seja, 9.

15) Ao dividir-se a fração $\frac{3}{5}$ pela fração $\frac{2}{3}$ encontrou-se $\frac{2}{5}$. Qual é, aproximadamente, o percentual do erro cometido?
(A) $35,55\%$
(B) $45,55\%$
(C) $55,55\%$
(D) $65,55\%$
(E) $75,55\%$

RESPOSTA: C

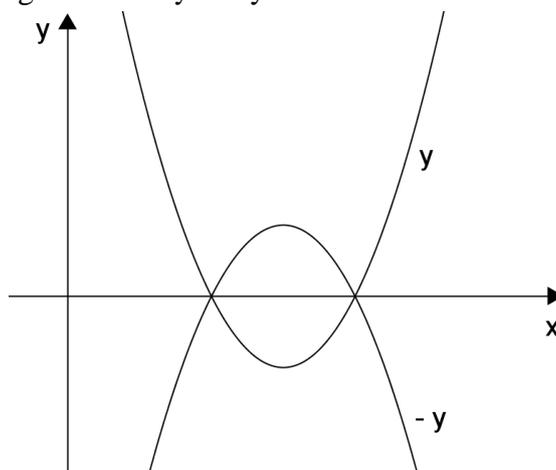
RESOLUÇÃO:
$\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Erro percentual: $\dfrac{\dfrac{9}{10}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{9}{10}}\cdot 100\% = \dfrac{\dfrac{9-4}{10}}{\dfrac{9}{10}}\cdot 100\% = \dfrac{5}{9}\cdot 100\% = \dfrac{500}{9}\% \cong 55,55\%$

16) O gráfico de um trinômio do 2º grau y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio $-y$ tem um valor

(A) mínimo e raízes positivas.
(B) mínimo e raízes negativas.
(C) máximo e raízes positivas.
(D) máximo e raízes negativas.
(E) máximo e raízes de sinais opostos.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
O trinômio y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem, então o trinômio tem um ponto de mínimo e duas raízes positivas.
O gráfico do trinômio $-y$ é simétrico do gráfico de y em relação ao eixo Ox. Portanto, o trinômio $-y$ possui ponto de máximo e as mesmas raízes de y, ou seja, duas raízes positivas.
A figura abaixo representa os gráficos de y e $-y$.

É possível demonstrar as relações entre os pontos extremos e as raízes de y e $-y$.
Seja $y = ax^2 + bx + c$. Como o gráfico de y tem concavidade para cima, então $a > 0$ e possui ponto de mínimo. Como o gráfico de y intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem, então y possui duas raízes positivas cuja soma é $S = -\dfrac{b}{a} > 0$ e o produto é $P = \dfrac{c}{a} > 0$.
O trinômio $-y$ é representado por $-y = -ax^2 - bx - c$. Como $-a < 0$, então o gráfico de $-y$ tem concavidade voltada para baixo e possui ponto de máximo. A soma das raízes de $-y$ é $S' = -\dfrac{-b}{-a} = -\dfrac{b}{a} > 0$ e o produto das raízes é $P' = \dfrac{-c}{-a} = \dfrac{c}{a} > 0$, logo as duas raízes de y' são positivas.

17) Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

(A) $6,5$

(B) $7,0$

(C) $7,5$

(D) $8,0$

(E) $8,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

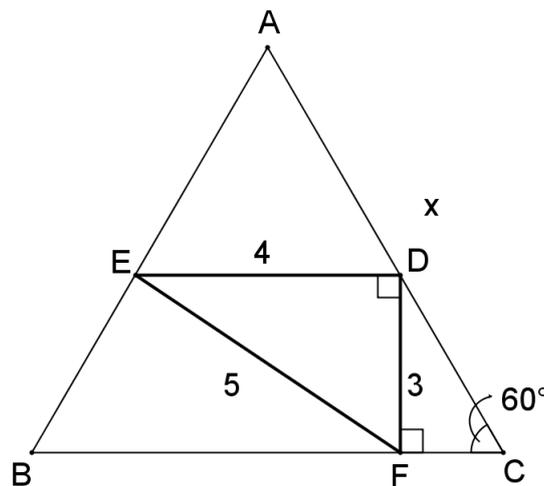
Sejam $k-1$, k e $k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, os lados do triângulo retângulo.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(k+1)^2 = k^2 + (k-1)^2 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = k^2 + k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 0$ (não convém) ou $k = 4$

Logo, os lados do triângulo retângulo são 3, 4 e 5.

A figura a seguir representa o triângulo equilátero T e o triângulo retângulo inscrito.

$DE \parallel BC \Rightarrow \Delta ADE$ é equilátero $\Rightarrow AD = DE = 4$

$DE \parallel BC \Rightarrow C\hat{F}D = E\hat{D}F = 90^\circ \Rightarrow \Delta DFC$ é retângulo

$$\text{sen}\, D\hat{C}F = \frac{DF}{DC} \Rightarrow \text{sen}\, 60^\circ = \frac{3}{DC} \Leftrightarrow DC = \frac{3}{\text{sen}\, 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}$$

$x = AC = AD + DC = 4 + 2\sqrt{3} \approx 4 + 2 \cdot 1,73 = 7,46$ unidades de comprimento

18) Analise as afirmativas abaixo.

I – Dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si.

II – Se o inteiro x é múltiplo do inteiro y e x é múltiplo do inteiro z, então x é múltiplo do inteiro yz.

III – A igualdade $(1/a) + (1/b) = 2/(a+b)$, é possível no campo dos reais.

Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA
Vamos supor por absurdo que existam dois números positivos n e $n+1$ que não são primos entre si, então existe um inteiro positivo $d \neq 1$ tal que $d = MDC(n, n+1)$.
Logo, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $n = d \cdot a$, $n+1 = d \cdot b$ e $MDC(a,b) = 1$.
$\Rightarrow (n+1) - n = d \cdot b - d \cdot a = d \cdot (a-b) = 1 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$ (ABSURDO)
Logo, dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si. (C.Q.D.)
II – FALSA
Contraexemplo: $y = 6$, $z = 10$ e $x = 30$.
A afirmativa seria correta se dissesse que x é múltiplo do $MMC(y,z)$. Note que $MMC(y,z)$ somente é igual a yz quando y e z são primos entre si.
III – FALSA
Note que a, b e $a+b$ são não nulos.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-2ab}{ab(a+b)}=\frac{ab+b^2+a^2+ab-2ab}{ab(a+b)}=\frac{b^2+a^2}{ab(a+b)}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{2}{a+b}$$

19) O valor de $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número
(A) múltiplo de onze.
(B) múltiplo de sete.
(C) múltiplo de cinco.
(D) múltiplo de três.
(E) primo.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

$$5\sqrt{2}+7=\left(1+\sqrt{2}\right)^3$$

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}=\frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}\right]^{2008}}{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}\right]^{1338}}+3-2\sqrt{2}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4016}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4014}}+3-2\sqrt{2}=$$

$=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}+3-2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$ que é múltiplo de três.

20) Um trinômio do 2º grau tem coeficientes inteiros, distintos e não nulos. Se o termo independente for uma das suas raízes, a outra será o
(A) inverso do coeficiente do termo de 1º grau.
(B) inverso do coeficiente do termo de 2º grau.
(C) simétrico inverso do coeficiente do termo do 1º grau.
(D) simétrico inverso do coeficiente do termo do 2º grau.
(E) simétrico inverso do coeficiente do termo independente.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja o trinômio do segundo grau $y=ax^2+bx+c$, cujo termo independente é $c\neq 0$.

O produto das raízes é dado por $P=\frac{c}{a}$.

Sendo uma das raízes $x_1=c$ a outra raiz x_2 deve ser tal que $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow c\cdot x_2=\frac{c}{a}\overset{c\neq 0}{\Leftrightarrow} x_2=\frac{1}{a}$

Logo, a outra raiz é o inverso do coeficiente do termo de 2º grau.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2007/2008

1) Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $K = a^4 - 6a + 1$. Logo, K também pode ser expresso por:

(A) $3a^2 + 86a + 1$

(B) $3a^2 + 84a + 1$

(C) $6a^2 + 86a + 1$

(D) $6a^2 + 84a + 1$

(E) $9a^2 + 86a + 1$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$a^3 - 3a + 1 = 93 \Leftrightarrow a^3 = 3a + 92 \Leftrightarrow a^4 = 3a^2 + 92a$$

$$\Rightarrow K = a^4 - 6a + 1 = \left(3a^2 + 92a\right) - 6a + 1 = 3a^2 + 86a + 1$$

2) Sabendo-se que um grado é a centésima parte de um ângulo reto, quantos grados tem o ângulo de $45^o\,36'\,54''$?

(A) $50,48333\ldots$

(B) $50,58333\ldots$

(C) $50,68333\ldots$

(D) $50,78333\ldots$

(E) $50,88333\ldots$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$1\,\text{gr} = \frac{1}{100} \cdot 90^\circ = \frac{1}{100} \cdot 90 \cdot 3600'' = 3240'' \Leftrightarrow 1'' = \frac{1}{3240}\,\text{gr}$$

$$45^o\,36'\,54'' = 45 \cdot 3600'' + 36 \cdot 60'' + 54'' = 164214'' = 164214 \cdot \frac{1}{3240}\,\text{gr} = \frac{3041}{60}\,\text{gr} = 50,68333\ldots$$

Note que utilizamos que $1^\circ = 60' = 3600''$ e $1' = 60''$.

3) Se $x + y = 2$ e $\left(x^2 + y^2\right) / \left(x^3 + y^3\right) = 4$, então xy é igual a:

(A) $12/11$

(B) $13/11$

(C) $14/11$

(D) $15/11$

(E) $16/11$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}=4 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)^3-3xy(x+y)}=4 \Leftrightarrow \frac{2^2-2xy}{2^3-3xy\cdot 2}=4$$

$$\Leftrightarrow 4-2xy=4(8-6xy) \ \wedge \ xy \neq \frac{4}{3} \Leftrightarrow xy=\frac{14}{11}$$

4) Uma dívida, contraída à taxa de juros simples de 10% ao mês, deverá ser paga em duas parcelas, respectivamente, iguais a $R\$126,00$, daqui a 4 meses, e $R\$192,00$, daqui a 6 meses. Caso essa mesma dívida fosse paga em duas parcelas iguais, uma daqui a 4 meses, e a outra daqui a 6 meses, qual seria a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso?

(A) $R\$\,4,30$

(B) $R\$\,4,40$

(C) $R\$\,4,50$

(D) $R\$\,4,60$

(E) $R\$\,4,70$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja x o valor presente equivalente a uma parcela de $R\$126,00$ daqui a 4 meses, temos:

$$x\cdot\left(1+\frac{10}{100}\cdot 4\right)=126 \Leftrightarrow 1,4x=126 \Leftrightarrow x=90.$$

Seja y o valor presente equivalente a uma parcela de $R\$192,00$ daqui a 6 meses, temos:

$$y\cdot\left(1+\frac{10}{100}\cdot 6\right)=192 \Leftrightarrow 1,6y=192 \Leftrightarrow y=120.$$

Assim, o valor atual da dívida é $x+y=90+120=210,00$.

Sejam P o valor das parcelas e P_1 e P_2 os valores presentes da parcela paga daqui a 4 meses e da parcela paga daqui a 6 meses, respectivamente, então: $P=P_1\cdot\left(1+\frac{10}{100}\cdot 4\right)=1,4\cdot P_1$ e $P=P_2\cdot\left(1+\frac{10}{100}\cdot 6\right)=1,6\cdot P_2$.

Como o valor atual da dívida é $R\$\,210,00$, então:

$$P_1+P_2=210 \Leftrightarrow \frac{P}{1,4}+\frac{P}{1,6}=210 \Leftrightarrow 3P=210\cdot 1,4\cdot 1,6 \Leftrightarrow P=156,80.$$

A soma dos valores pagos no primeiro caso é $126+192=318,00$ e no segundo caso é $2P=2\cdot 156,80=313,60$. Assim, a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso é $318,00-313,60=4,40$, ou seja, $R\$\,4,40$.

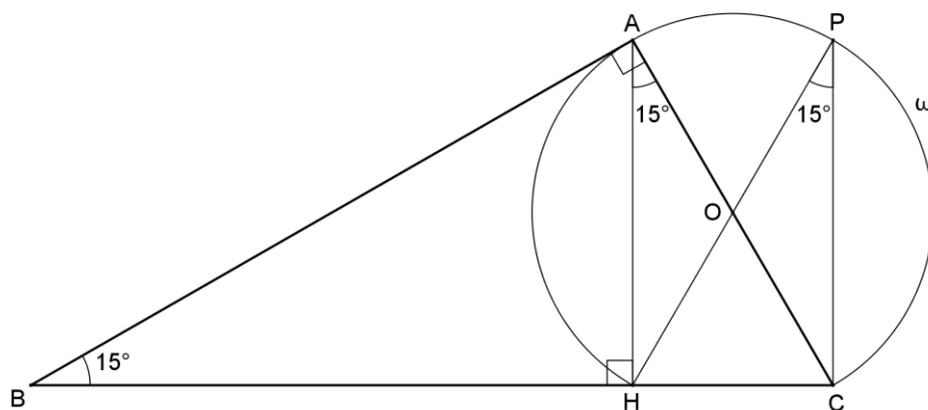
5) Em um numero natural N de 9 algarismos, tem-se: os algarismos das unidades simples, unidade de milhar e unidades de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhar iguais a z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:
(A) 333664
(B) 333665
(C) 333666
(D) 333667
(E) 333668

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$N = \overline{zyx.zyx.zyx} = \overline{zyx} \cdot 10^6 + \overline{zyx} \cdot 10^3 + \overline{zyx} = \overline{zyx} \cdot (10^6 + 10^3 + 1) = \overline{zyx} \cdot 3 \cdot 333667$
$\Rightarrow 333667 \mid N$

6) ABC é um triangulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte de BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:
(A) AC
(B) AB
(C) $BC/2$
(D) $HC/2$
(E) AH

RESPOSTA: A

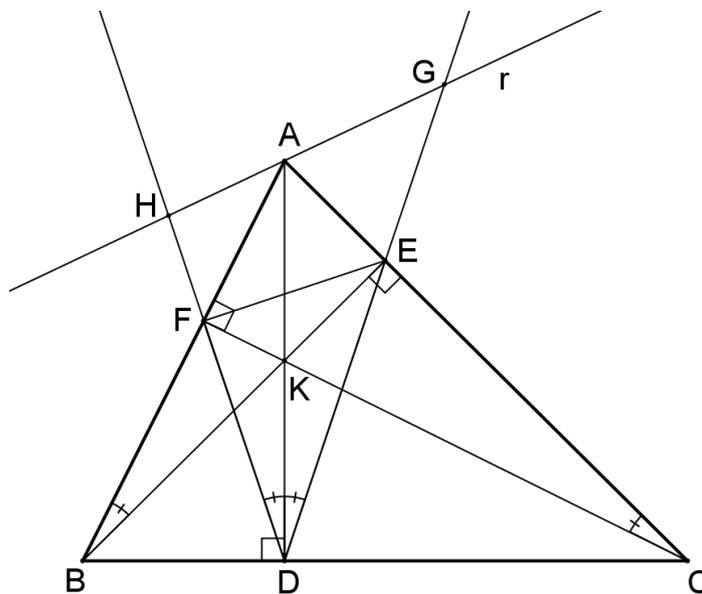
RESOLUÇÃO:
A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e foi desenhada fora de proporção para facilitar a visualização.

$A\hat{B}C = 15^\circ \Rightarrow H\hat{A}C = 15^\circ$
Como $H\hat{A}C = H\hat{P}C = 15^\circ$, então A e P pertencem ao arco capaz de 15° sobre o segmento HC.
Como $A\hat{H}C = 90^\circ$, então AC é diâmetro do círculo ω que passa por H, A, P e C.

O segmento PH é uma corda do círculo ω, então, para que PH seja máximo, deve ser igual ao diâmetro do círculo, ou seja, $PH = AC$.

7) Num triangulo acutângulo qualquer ABC, os pontos D, E e F são, respectivamente, os pés das alturas AD, BE e CF. traçam-se, a partir de D, as semirretas DE e DF. Uma reta r passa por A, intersectando a semirreta DE em G e a semirreta DF em H. Qualquer que seja a reta r, pode-se afirmar que:

(A) $AG : AH :: DG : DH$
(B) $EG : DE :: FH : DF$
(C) $DG : DH :: DE : DF$
(D) $AG : GE :: AH : HF$
(E) $DE : AG :: DF : AH$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A figura acima representa a situação descrita no enunciado, onde o triângulo DEF é o triângulo órtico do ΔABC e K é o ortocentro do ΔABC.

$A\hat{B}E = 90^\circ - \hat{A} \wedge A\hat{C}F = 90^\circ - \hat{A} \Rightarrow A\hat{B}E = A\hat{C}F$

$B\hat{F}K = 90^\circ = B\hat{D}K \Rightarrow \# BFKD$ é inscritível $\Rightarrow F\hat{B}K = F\hat{D}K$

$C\hat{E}K = 90^\circ = C\hat{D}K \Rightarrow \# CEKD$ é inscritível $\Rightarrow E\hat{C}K = E\hat{D}K$

Das três igualdades acima, obtém-se:

$H\hat{D}A = F\hat{D}K = F\hat{B}K = A\hat{B}E = A\hat{C}F = E\hat{C}K = E\hat{D}K = G\hat{D}A$.

Como $H\hat{D}A = G\hat{D}A$, então DA é bissetriz interna do ΔDHG e pelo teorema das bissetrizes internas, temos: $\frac{AH}{DH} = \frac{AG}{DG} \Leftrightarrow \frac{AG}{AH} = \frac{DG}{DH} \Leftrightarrow (AG : AH :: DG : DH)$.

8) Qual a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2º grau $x^2 - 6x + 2 = 0$?

(A) $\left(6+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

(B) $\left(6+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$

(C) $\left(3+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

(D) $\left(3+2\cdot 3^{1/2}\right)^{1/2}$

(E) $\left(3+3\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Sejam a e b as raízes da equação $x^2-6x+2=0$, então $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 2=28>0$, $a+b=\frac{-(-6)}{1}=6$ e $a\cdot b=\frac{2}{1}=2$.
Como o discriminante da equação, a soma e o produto das raízes são positivos, então as duas raízes são reais e positivas, e, consequentemente, suas raízes quadradas são números reais.
Seja $s=\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ a soma das raízes quadradas da equação, então
$s^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}=6+2\sqrt{2}\Leftrightarrow s=\sqrt{6+2\sqrt{2}}=\left(6+2\cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$.

9) Qual será o dia da semana na data 17 de setembro de 2009 (considerando que hoje é domingo, 29 de julho de 2007)?
(A) 2^a feira.
(B) 3^a feira.
(C) 4^a feira.
(D) 5^a feira.
(E) 6^a feira.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A quantidade de dias entre o dia 29 de julho de 2007 (domingo) e o dia 17 de setembro de 2009 (sem contar as datas das extremidades) é:
$2+31+30+31+30+31+366+31+28+31+30+31+30+31+31+16=780$, onde se utilizou 366 para a quantidade de dias do ano de 2008, pois o mesmo é bissexto.
A cada 7 dias completa-se uma semana e como $780=11\cdot 7+3$, então o dia 17 de setembro de 2009 será 4 dias da semana após o domingo, ou seja, 5^a feira.

Outra maneira de resolver o problema é observar que se a quantidade de dias de uma data até outra (incluindo apenas o segundo extremo) é congruente a zero módulo 7, então as duas datas ocorrem no mesmo dia da semana.
Dessa forma, de 29 de julho de 2007 (domingo) a 29 de julho de 2008, há 366 dias (pois o ano de 2008 é bissexto) e $366\equiv 2\pmod 7$, portanto o dia 29 de julho de 2008 é uma 3^a feira.

De 29 de julho de 2008 (3^a feira) a 29 de julho de 2009, há 365 dias e $365 \equiv 1 \pmod 7$, portanto o dia 29 de julho de 2009 é uma 4^a feira.
De 29 de julho de 2009 (4^a feira) a 17 de setembro de 2009, há $2+31+17=50$ dias e $50 \equiv 1 \pmod 7$, portanto o dia 17 de setembro de 2009 é uma 5^a feira.

10) Qual é a soma dos valores reais de x que satisfazem a equação $x^2 - 3x + 1 + (x^2 - 3x + 2)^{-1} = 1$?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja $y = x^2 - 3x + 2 \neq 0$, temos:
$$x^2 - 3x + 1 + (x^2 - 3x + 2)^{-1} = 1 \Rightarrow (y-1) + y^{-1} = 1 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$
Logo, $y = x^2 - 3x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$, onde $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$.
Portanto, a equação possui duas raízes reais cuja soma é $\frac{-(-3)}{1} = 3$.

11) Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165 cm de largura, com um numero exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um numero inteiro de cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?
(A) 27
(B) 30
(C) 33
(D) 36
(E) 38

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja $x \in \mathbb{Z}$ a medida em centímetros do lado da lajota quadrada, então o comprimento 198 cm e a largura 165 cm da área retangular devem ser múltiplos de x, ou seja, $x \mid 198$ e $x \mid 165$.
Se x é o maior possível, então x é o maior divisor comum de 198 e 165, isto é, $x = \text{mdc}(198,165)$.
Como $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ e $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, então $x = \text{mdc}(198,165) = 3 \cdot 11 = 33$ cm.
O número de lajotas usadas é igual a $\frac{198}{33} \cdot \frac{165}{33} = 6 \cdot 5 = 30$.

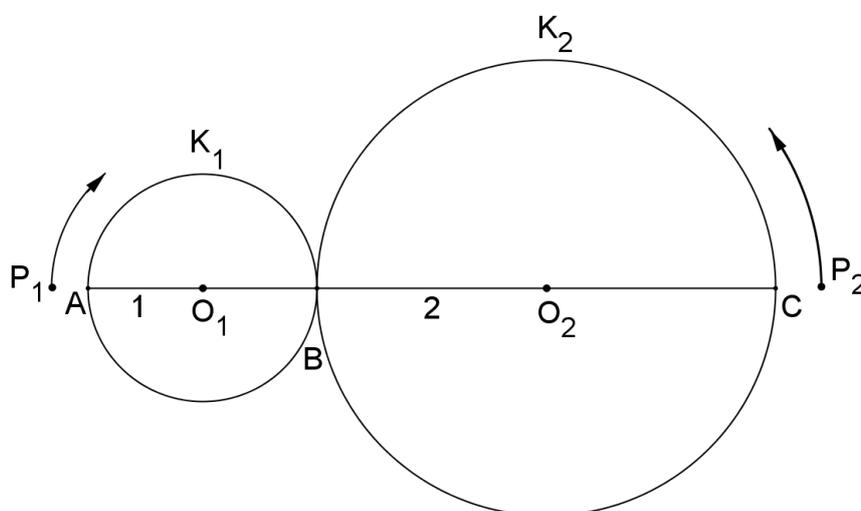
12) Um móvel P_1 parte, no sentido horário, do ponto A de uma circunferência K_1 de diâmetro $AB = 2$ e, no mesmo instante, um outro móvel P_2 parte, no sentido anti-horário, do ponto C de uma circunferência K_2 de diâmetro $BC = 4$. Sabe-se que:

- A, B e C são colineares;
- P_1 e P_2 têm velocidade constante;
- K_1 e K_2 são tangentes exteriores em B;
- P_1 e P_2 mudam de circunferência todas as vezes que passam pelo ponto B;
- P_2 leva 4 segundos para dar uma volta completa em K_2;
- O primeiro encontro de P_1 e P_2 ocorre no ponto B, quando eles passam pela terceira vez por este ponto.

Quantos segundos leva P_1 para dar uma volta completa em K_1?

(A) $24/7$
(B) $22/7$
(C) $20/7$
(D) $18/7$
(E) $16/7$

RESPOSTA: E

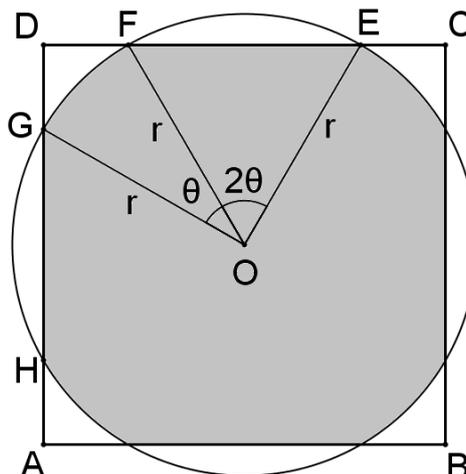
RESOLUÇÃO:

A razão entre os comprimentos das circunferências K_1 e K_2 é $1:2$. Como P_2 possui velocidade constante, se ele leva 4 s para dar uma volta em K_2, então leva 2 s para dar uma volta em K_1.
O móvel P_2 passa pela terceira vez pelo ponto B, após meia volta em K_2, uma volta em K_1 e mais uma volta em K_2. Isso ocorre após $1,5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 8\text{ s}$.
O móvel P_1 passa pela terceira vez pelo ponto B, após meia volta em K_1, uma volta em K_2 e uma volta em K_1. Se $t\text{ s}$ é o tempo que P_1 demora para dar uma volta em K_1, então P_1 demora $2t\text{ s}$ para dar uma volta em K_2.

Como P_1 passa pela terceira vez pelo ponto B após $8\,s$, então $1,5\cdot t + 1\cdot 2t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3,5} = \frac{16}{7}\,s$.

13) Com a "ponta seca" de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado 2, traça-se uma circunferência de raio r. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de 3 igual a $1,7$ e $pi = 3$, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?

(A) $2,8$
(B) $3,0$
(C) $3,2$
(D) $3,4$
(E) $3,6$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

(A) Como cada arco externo tem o dobro do comprimento de cada arco interno, o ângulo central associado ao arco externo é o dobro do ângulo central associado ao arco interno. Assim,

(B) $4\cdot(\theta + 2\theta) = 360^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$.

(C) Como $2\theta = 60^\circ$, o triângulo OEF é equilátero de lado r e a sua altura é metade do lado do quadrado. Portanto, $\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(D) A área da interseção do quadrado com o círculo é dada pela área do círculo menos 4 segmentos circulares de $2\theta = 60^\circ$.

(E) A área do segmento circular de 60° em uma circunferência de raio $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ é:

(F) $S_{seg\,60^\circ} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(G) Portanto, a área pedida é dada por:

(H) $S=\pi\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-\frac{8\pi}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\approx\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{4}{3}\cdot 1,7=\frac{4}{3}\cdot 2,7=3,6\text{ u.a.}$.

14) Dois amigos compraram uma rifa por R\$ 20,00 cujo prêmio é de R\$ 1.000,00. Um deles deu R\$ 15,00, e, o outro, R\$ 5,00. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu a maior parte?

(A) R\$ 250,00
(B) R\$ 300,00
(C) R\$ 450,00
(D) R\$ 500,00
(E) R\$ 750,00

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O valor que cada um deve receber do prêmio é proporcional ao valor que cada um deu para a compra da rifa.
Assim, podemos dizer que um dos amigos receberá $15k$ e o outro $5k$, e que $15k+5k=1000\Leftrightarrow k=50$.
Logo, o amigo que deu a maior parte receberá a mais que o outro $15k-5k=10k=10\cdot 50=500,00$ reais.

15) Em uma classe de x alunos, o professor de matemática escreveu, no quadro de giz, um conjunto A de n elementos. A seguir, pediu que, por ordem de chamada, cada aluno fosse ao quadro e escrevesse um subconjunto de A, diferente dos que já foram escritos. Depois de cumprirem com a tarefa, o professor notou que ainda existiam subconjuntos que não haviam sido escritos pelos alunos. Passou a chamá-los novamente, ate que o 18° aluno seria obrigado a repetir um dos subconjuntos já escritos; o valor mínimo de x, que atende às condições dadas, está entre:

(A) 24 e 30.
(B) 29 e 35.
(C) 34 e 40.
(D) 39 e 45.
(E) 44 e 50.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A quantidade de subconjuntos distintos de A é igual à quantidade de alunos da turma mais 17. Assim, $2^n=x+17$.
Para que x assuma seu valor mínimo, n também deve assumir o seu valor mínimo, dadas as condições $x\ge 18$ e $2^n\ge 18+17=35$. Portanto, $n=6$ e $x=2^n-17=2^6-17=64-17=47$, que está entre 44 e 50.

16) Um reservatório deve ser cheio completamente com uma mistura de 76% de gasolina e de 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?

(A) $1\text{ h }\ 30\text{ min}$.

(B) $1\text{ h }\ 36\text{ min}$.

(C) $1\text{ h }\ 42\text{ min}$.

(D) $1\text{ h }\ 48\text{ min}$.

(E) $1\text{ h }\ 54\text{ min}$.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja V o volume do reservatório, a torneira de gasolina enche $\frac{V}{4}$ por hora e a torneira de álcool enche $\frac{V}{6}$ por hora.

Para que a mistura tenha 76% de gasolina e de 24% de álcool, o tanque deverá conter $0,76V$ de gasolina e $0,24V$ de álcool.

Se t_G é o tempo que a torneira de gasolina deve ficar aberta, então $\frac{V}{4}\cdot t_G = 0,76V \Leftrightarrow t_G = 3,04\text{ h}$.

Se t_A é o tempo que a torneira de álcool deve ficar aberta, então $\frac{V}{6}\cdot t_A = 0,24V \Leftrightarrow t_A = 1,44\text{ h}$.

Assim, o tempo a mais que uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada é $t_G - t_A = 3,04 - 1,44 = 1,6\text{ h} = 1\text{h } 36\text{ min}$.

17) Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se $1,7$ para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

(A) $54,4$

(B) $47,6$

(C) $40,8$

(D) $34,0$

(E) $30,6$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.

Sabemos que uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Como $BC = CD = 60^\circ$, então O, C e Y estão alinhados.

No triângulo retângulo OAX, $A\hat{O}X = 30^\circ$ e $\frac{AX}{OA} = \text{tg}\, 30^\circ \Leftrightarrow \frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo ODY, $D\hat{O}Y = 60^\circ$ e $\frac{DY}{DO} = \text{tg}\, 60^\circ \Leftrightarrow \frac{b}{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = 6\sqrt{3}$.

Como retas tangentes a uma circunferência por um mesmo ponto são iguais e como $A\hat{O}X = A\hat{O}W = 30^\circ$, temos $a = XA = XB = WA = WF = 2\sqrt{3}$.

Da mesma forma, $b = YB = YD = WD = WF = 6\sqrt{3}$.

Portanto, o perímetro do quadrilátero $XYZW$ é:

$$2p_{XYZW} = XY + YZ + ZW + WX = (a+b) + 2b + (a+b) + 2a = 4\cdot(a+b) =$$

$$= 4\cdot\left(2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = 32\sqrt{3} = 32\cdot 1,7 = 54,4 \text{ u.c.}$$

Observe que o quadrilátero $XYZW$ é um trapézio isósceles.

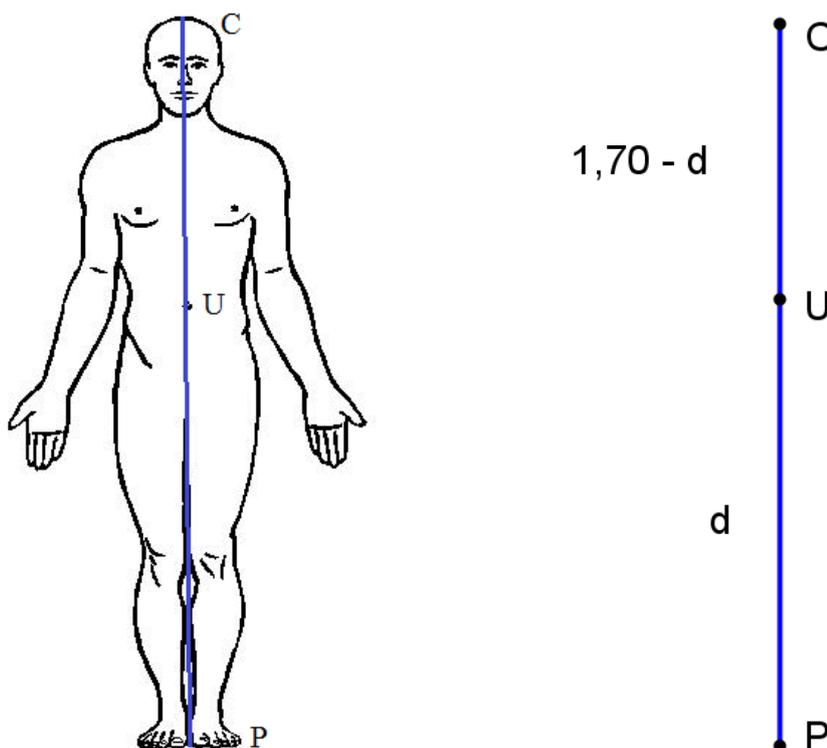
18) Teoricamente, num corpo humano de proporções perfeitas, o umbigo deve estar localizado num ponto que divide a altura da pessoa na média e extrema razão (razão áurea), com a distância aos pés maior que a distância à cabeça. A que distância, em metros, dos pés, aproximadamente, deverá estar localizado o umbigo de uma pessoa com $1,70$ m de altura, para que seu corpo seja considerado em proporções perfeitas?

Dados: Usar $2,24$ para raiz quadrada de 5.

(A) $1,09$

(B) $1,07$
(C) $1,05$
(D) $1,03$
(E) $1,01$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

A razão áurea é $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $UP > UC$, então:

$$\frac{UP}{UC} = \phi \Leftrightarrow \frac{d}{1,70-d} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{5}\right)d = 1,7\left(1+\sqrt{5}\right)$$

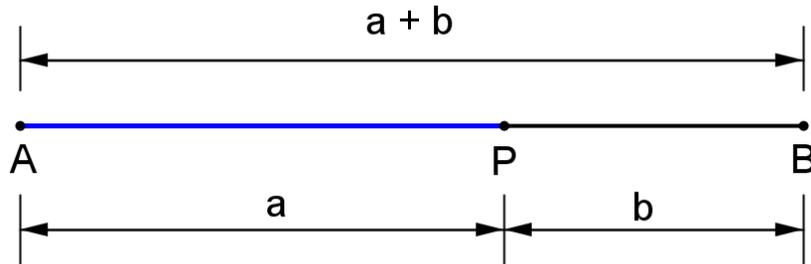
$$\Leftrightarrow d = \frac{1,7\left(1+\sqrt{5}\right)}{3+\sqrt{5}} = \frac{1,7\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5} = 0,85\left(\sqrt{5}-1\right) \approx 0,85\cdot(2,24-1) = 1,054 \text{ u.c.}$$

NOTA 6: Divisão de um segmento em média e extrema razão (divisão áurea)

Um ponto P divide internamente um segmento de reta $\overline{AB}$ segundo uma razão áurea (φ) quando a primeira parte está para a segunda parte assim como o segmento todo está para a primeira parte, ou seja, $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{PA} = \varphi$.

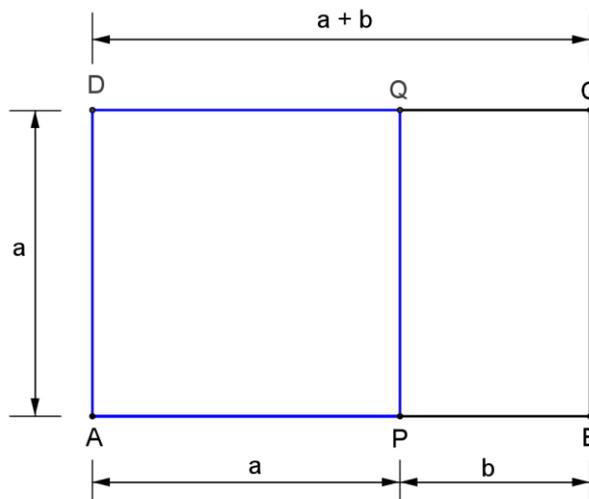
O ponto P assim obtido é denominado ponto áureo de $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{PA}$, segmento áureo de $\overline{AB}$.

Note que o segmento áureo (PA) é a média geométrica entre o segmento dado (AB) e o outro segmento aditivo (PB).

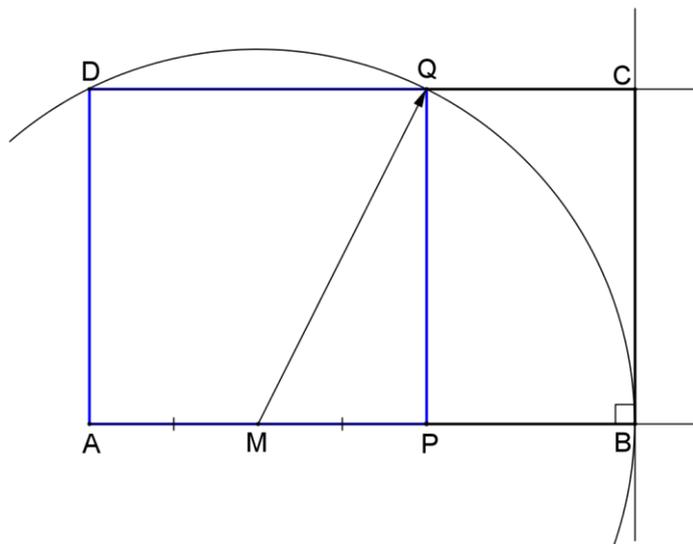
Sejam $AP = a$, $PB = b$, $AB = a + b$, onde o ponto P divide $\overline{AB}$ auricamente, temos:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{PA} = \varphi \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a} = \varphi \Leftrightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boldsymbol{\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

O retângulo áureo é um retângulo no qual a razão entre o maior lado e o menor lado é igual à razão áurea.

Seja um retângulo áureo cujo maior lado possui medida a e o menor lado possui medida b tais que $\frac{a}{b} = \varphi$. Se colocarmos esse retângulo adjacente a um quadrado cujo lado mede a, obtemos um retângulo áureo semelhante com lado maior de medida $a + b$ e lado menor de medida a.

Construção do retângulo áureo.

1°) Construa um quadrado $APQD$;

2°) Marque o ponto médio M do lado AP do quadrado;
3°) Trace o arco de circunferência com centro M passando pelos vértices opostos do quadrado Q e D;
4°) A interseção do prolongamento do lado AP com o arco de circunferência é um vértice do retângulo áureo (B); e
5°) A interseção da perpendicular a AB passando por B com o prolongamento de DQ é o outro vértice do retângulo áureo (C).

19) Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana $AM = 12$, traçam-se os segmentos $AQ = 3$ e $QP = 6$. Sabendo-se que E é ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triangulo QPE?
(A) 6.
(B) 8.
(C) 9.
(D) 12.
(E) 18.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Dado que $AM = 12$, $AQ = 3$ e $QP = 6$, então $PM = AM - AQ - QP = 12 - 3 - 6 = 3$.
Como AM é mediana do ΔABC, então M é ponto médio de AB e, consequentemente, QM é mediana do ΔBQC.
O ponto P divide a mediana QM na razão $\frac{QP}{PM} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, portanto P é baricentro do ΔBQC e, consequentemente, E é ponto médio de QC.
A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e as conclusões acima. Nessa figura, vamos supor $S_{PEM} = s$. A partir daí, vamos encontrar a área dos outros triângulos utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases.

Observando a figura (5), concluímos que $S_{ABC} = 16s = 72 \Rightarrow S_{QPE} = 2s = 9$ u.a..

Note que, na figura (5), só precisávamos saber que $S_{ABM} = S_{ACM} = 8s$ para resolver esse problema.

20) Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais foram denominados A, B e C, não necessariamente nessa ordem. Em um grupo de 19 números reais, sabe-se que 4 são irracionais, 7

pertencem a C e 10 pertencem a A. Quantos desses números pertencem, exclusivamente, ao conjunto B?
(A) 3.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.
(E) 8.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Se, em um grupo de 19 números reais, 4 são irracionais, então 15 são racionais.
Dado que $n(C)=7$ e $n(A)=10$, então o conjunto que possui 15 elementos deve ser o conjunto B, portanto $B=\mathbb{Q}$ e $n(B)=15$.
Como $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, então o conjunto dos inteiros deve possuir mais elementos que o dos naturais, portanto $C=\mathbb{N}$ e $A=\mathbb{Z}$
Os números que pertencem exclusivamente a B são os racionais não inteiros, ou seja, $B-A$. A quantidade de elementos desse conjunto é $n(B-A)$ e, como $A\subset B$, temos $n(B-A)=n(B)-n(A)=15-10=5$.
O diagrama de Venn a seguir representa os valores encontrados no problema.